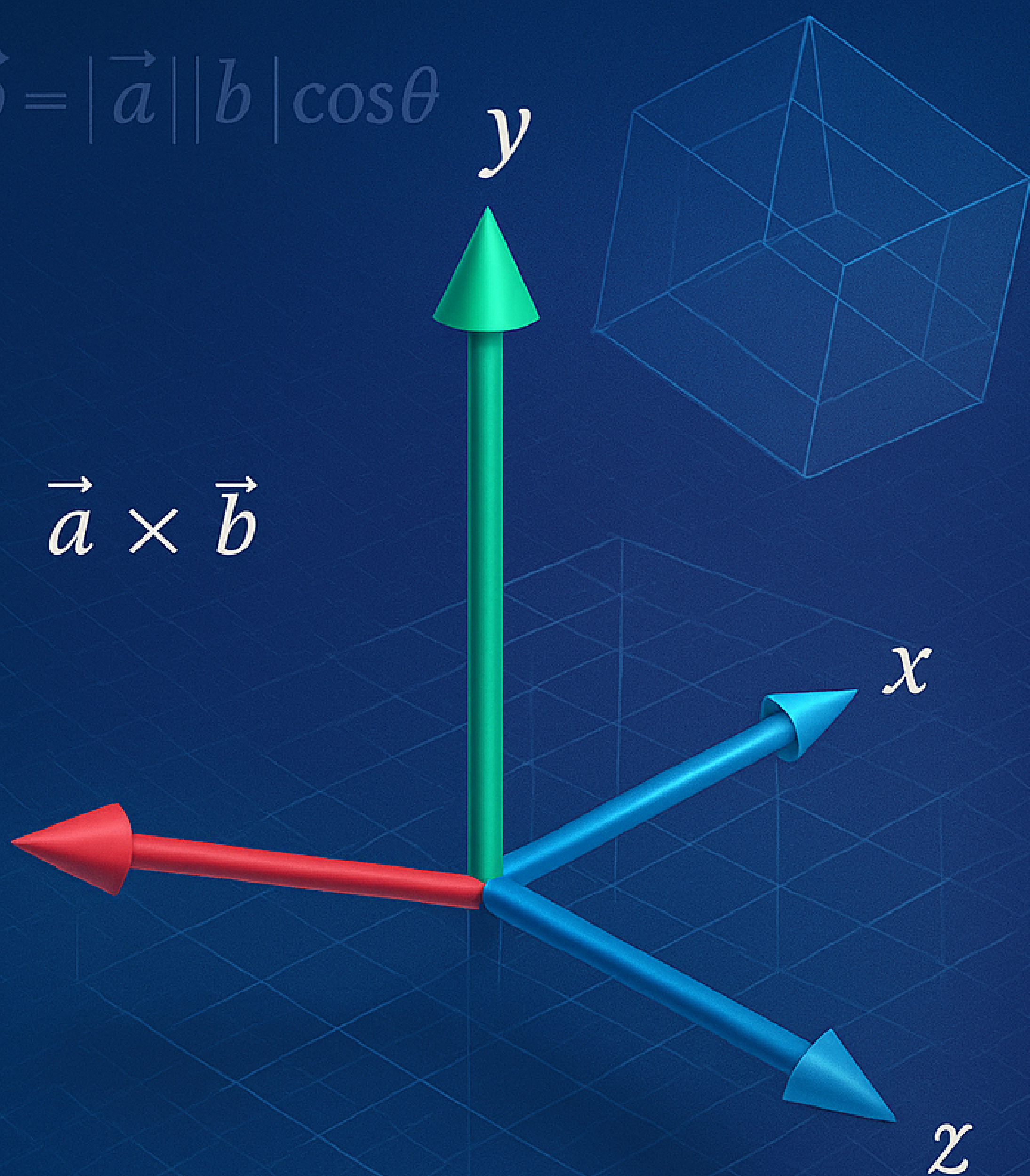
Álgebra Vectorial y Geometría del Espacio

Fundamentos, aplicaciones y visualización tridimensional



facultad de Ingeniería UNAM
Facultad de Ciencias Exactas



Geometría Analítica en el Espacio

Érik Castañeda De Isla Puga

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO

Érik Castañeda De Isla Puga

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, Érik. *Geometría analítica en el espacio*. México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 2006, 229 p.

Geometría analítica en el espacio

Ciudad Universitaria, México, D. F.
ISBN 968-36-7331-7

Primera edición, junio de 2000.
Tercera reimpresión, junio de 2006.

Impreso en México.

Un especial agradecimiento a la
maestra en ingeniería Leda Speziale San Vicente
por la revisión técnica de la obra

PRÓLOGO

La escritura de un libro es una actividad de enorme responsabilidad. Es casi imposible que al llevar al papel las ideas, se logre hacer sin error. Por esta razón, personas con muchos conocimientos han preferido no escribir, con lo que se ha perdido la posibilidad de recibir de ellas una información inestimable.

Cuando recién me hice cargo de la Coordinación de Geometría Analítica, tuve que enfrentar la dificultad de la carencia de literatura acerca del tema Superficies, sobre todo en lo que respecta a la obtención de su ecuación, sea cartesiana, sea vectorial. Quienes tuvimos la fortuna de ser discípulos del maestro Enrique Rivero Borrell, supimos de su sapiencia en éste y muchos otros temas y de su oposición a escribir sobre las matemáticas que tanto dominaba. Por instancias del entonces jefe del Departamento de Matemáticas Básicas, el ingeniero Héctor F. Godínez Cabrera, y sin violar la voluntad del maestro Rivero Borrell, escribí el *Fascículo de Superficies*, con la inspiración de lo que había aprendido en el aula bajo la dirección del maestro Rivero, pero dejando claro que la responsabilidad y los errores eran míos.

Ante la aceptación del fascículo y con el apoyo de las autoridades de antes y de las actuales de la Facultad de Ingeniería, motivado ahora por el jefe del Departamento de Álgebra y Geometría, ingeniero Francisco Barrera García, me decidí a completar la obra con los capítulos restantes del programa de la asignatura. Para llevar a cabo esta actividad, he recibido todo tipo de ayuda o sugerencia, por lo que resulta imposible que mencione a quienes han colaborado de una u otra forma conmigo; sin embargo, merecen cita especial la maestra en ingeniería Leda Speziale San Vicente por su revisión técnica, la licenciada Amelia Guadalupe Fiel Rivera y la maestra en letras María Cuairán Ruidíaz, por su revisión gramatical y de estilo, el Taller de Análisis Gráfico de la División de Ciencias Básicas por la elaboración de las figuras, Ana María Sánchez Téllez por la captura definitiva y la corrección del material, todos aquellos profesores o alumnos que se dirigieron a mí para mostrarme errores o sugerencias y en particular, a las personas que estudien esta obra y que, con benevolencia, me indiquen los errores que, seguramente, aún tiene este libro.

A pesar de la certeza de que todavía se encuentran fallas en esta obra, es mi deseo y acepto mi responsabilidad de que vea la luz con la esperanza de que ayude a los estudiosos de la Geometría Analítica en su aprendizaje.

El libro contiene cinco capítulos. Los dos primeros puede decirse son la herramienta necesaria para el estudio de la Geometría Analítica. En el primero se presentan los Sistemas de Referencia, elemento indispensable, mientras que en el segundo se describe el Álgebra Vectorial que es una herramienta invaluable.

Los otros tres capítulos son en sí el estudio de la asignatura. En el tercero se trabaja con El Punto, la Recta y el Plano. En el cuarto con Curvas y en el quinto con Superficies. Todo el tratamiento de estos temas se basa en el Álgebra de los Vectores.

Finalmente, se presenta en un apéndice un método para investigar si una superficie es reglada o no. Este método fue ideado por el doctor Agustín Tristán López, ex catedrático de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Para su estudio es necesario tener ciertos conocimientos de Cálculo Diferencial de varias variables.

ÉRIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

ÍNDICE

CAPÍTULO 3. EL PUNTO, LA RECTA Y EL PLANO

CAPÍTULO 4. CURVAS

CAPÍTULO 5. SUPERFICIES

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DE REFERENCIA

1.1 INTRODUCCIÓN

DEFINICIÓN 1.1. *La Geometría Analítica es la parte de la Matemática que relaciona las dos ramas principales de esta disciplina: el Análisis y la Geometría.*

Desde la aparición del hombre sobre la Tierra, debió surgir la necesidad de contar y medir y, probablemente, desde ese momento nació la Matemática. Como puede fácilmente comprenderse, las cosas en nuestro mundo tienen características intrínsecas, es decir, no dependen de quien las observa. Por ejemplo, un arco de curva tiene una longitud que es suya, un sonido tiene un *timbre* que no depende de quien lo escucha, ni siquiera de si alguien lo oye; sin embargo, si se quiere apreciar, comparar o reproducir esa característica, es necesario un marco de referencia.

Pues bien, en Geometría Analítica, surge la necesidad de contar con dicho marco de referencia.

DEFINICIÓN 1.2. *Un sistema de referencia es un conjunto de elementos geométricos que permiten la localización de un punto en una recta, en un plano o en el espacio.*

Es pertinente hacer las siguientes observaciones:

— Se habla de localizar un punto únicamente, cuando se requiere en ocasiones de representar curvas y superficies, pero dichos lugares geométricos están constituidos por puntos, de manera que puede localizarse cada punto constituyente del lugar geométrico.

— La definición anterior no es de diccionario, ni siquiera puede decirse que es ortodoxa, pero permite dar una idea de lo que se requiere para lo que sigue.

Para situar un punto cualquiera en una recta basta con fijar un punto de ella como origen, dar un sentido y definir el tamaño de la unidad de medición; es decir, convertir a la recta en un eje, de tal manera que con indicar la distancia con un signo (*distancia dirigida*) puede localizarse al punto en estudio.

En lo que respecta al plano, el sistema más conocido en el bachillerato es el cartesiano derecho. Se le da el nombre de cartesiano en honor del matemático francés Renato Descartes, conocido por su nombre latino *Cartesius*. Este sistema consiste en dos ejes en ángulo recto, por lo que se le conoce también como *sistema rectangular*; la ubicación de un punto se logra al conocer las distancias del punto a cada uno de los ejes, la primera distancia se llama *abscisa* y la segunda *ordenada*. No se insistirá más en este sistema por el conocimiento que de él se tiene del bachillerato, únicamente se explicará lo del sistema derecho por medio de las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1.3. *Un sistema cartesiano es derecho si al girar el eje de las abscisas noventa grados para que coincida con el de las ordenadas, el giro tiene el sentido contrario al de las manecillas de un reloj.*

En algunas ocasiones es conveniente usar otro tipo de referencia, por lo pronto, existen también sistemas cartesianos izquierdos.

DEFINICIÓN 1.4. *Un sistema cartesiano es izquierdo si al hacer el giro de noventa grados para que coincidan el eje de las abscisas con el de las ordenadas, dicho giro es en el sentido que giran las manecillas de un reloj.*

Obsérvese que las definiciones de sistemas izquierdos y derechos son independientes de la posición horizontal, vertical o cualquiera otra de los ejes. En realidad, estas posiciones son relativas. Cuando se establece un sistema cartesiano en un lugar de trabajo, puede interrogarse ¿qué es vertical?

A continuación en la figura 1.1 se muestran algunos sistemas rectangulares derechos.

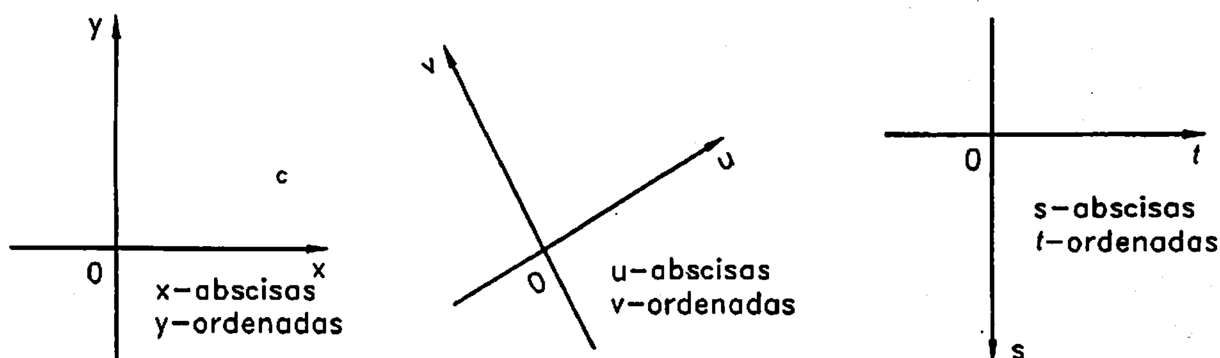


FIGURA 1.1

En la figura 1.2 se presentan algunos sistemas cartesianos izquierdos.

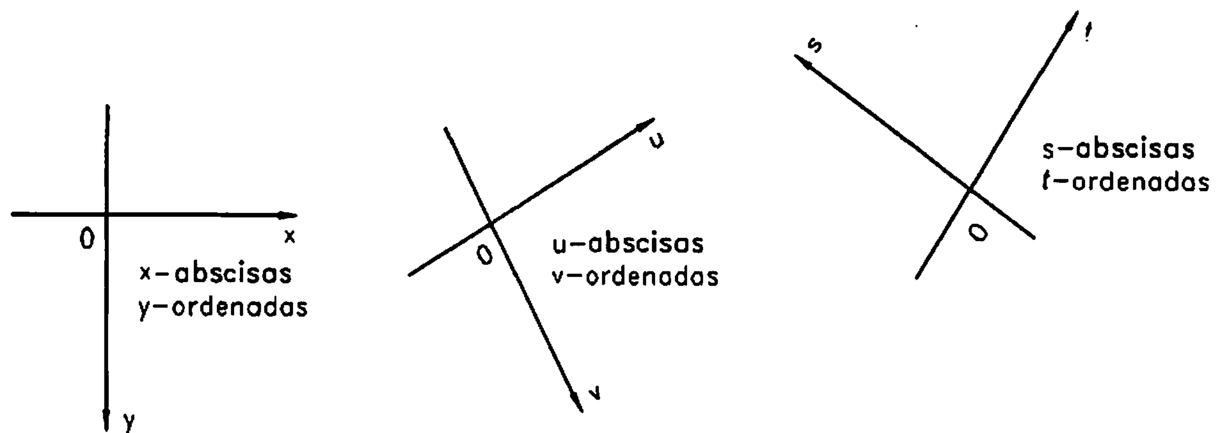


FIGURA 1.2

En el espacio un sistema cartesiano consiste en un conjunto de tres planos perpendiculares entre sí (Figura 1.3).

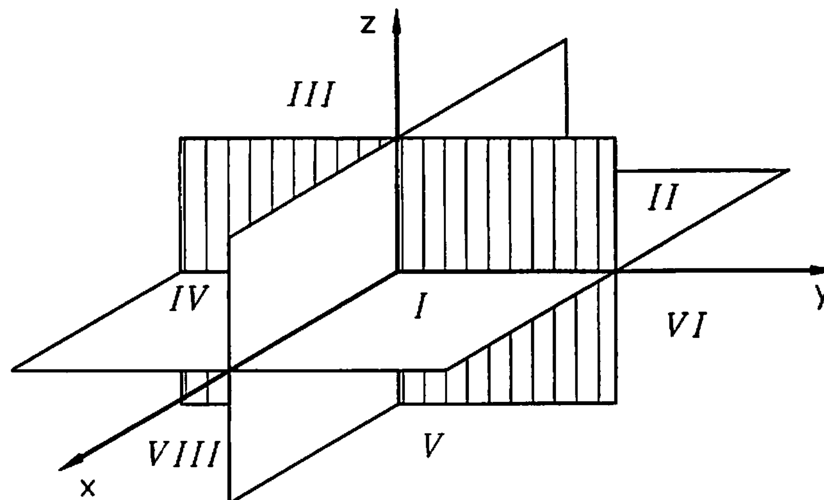


FIGURA 1.3

Nótese que los ejes de un sistema cartesiano en el plano dividen a éste en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*, mientras que en un sistema rectangular en el espacio, éste es dividido en ocho regiones que se conocen como *octantes*. En el plano, la clasificación de los cuadrantes se logra con la orientación de los ejes; así, por ejemplo, el primer cuadrante es aquel que se localiza en la región limitada por los semiejes positivos. En la figura 1.4 se señalan los cuatro cuadrantes.

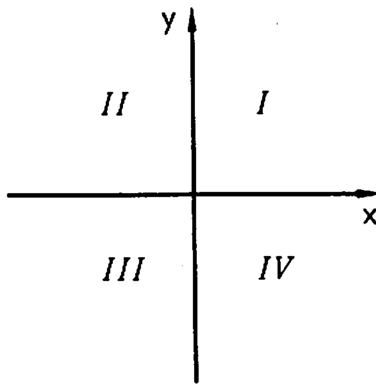


FIGURA 1.4

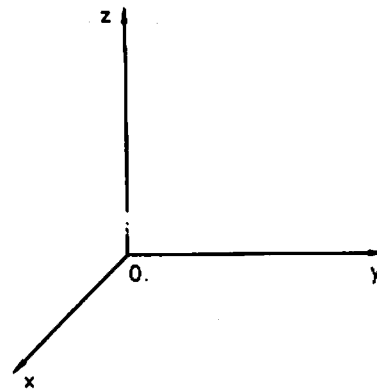


FIGURA 1.5

En el espacio, para tener también una adecuada definición de los octantes, en la intersección entre cada plano se tiene un eje en lugar de una recta, consiguiéndose así una precisa localización de un punto. Para la expansión de un sistema cartesiano en el plano a un sistema en el espacio, por cada eje se hace pasar un plano perpendicular al plano original y en la intersección entre estos dos planos se tiene el tercer eje, conocido como el de las cotas; entonces, las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio son su abscisa, su ordenada y su cota, en ese orden precisamente (Figura 1.5).

La orientación de los ejes depende de si el sistema es derecho o izquierdo.

DEFINICIÓN 1.5. *Un sistema cartesiano en el espacio es derecho si al ver el plano abscisas-ordenadas desde la parte positiva del eje de las cotas, el sistema en el plano es derecho.*

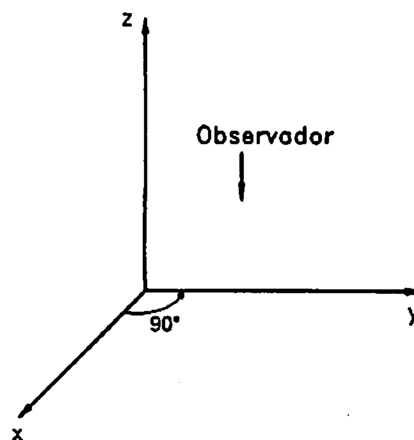


FIGURA 1.6

1.2 SIMETRÍA DE DOS PUNTOS

DEFINICIÓN 1.6. *Dos puntos A y B son simétricos con respecto a un punto C si éste es el punto medio de A y B.*

DEFINICIÓN 1.7. *Dos puntos A y B son simétricos con respecto a una recta L si la recta que pasa por A y B es perpendicular a L y el punto medio entre A y B pertenece a L.*

DEFINICIÓN 1.8. *Dos puntos A y B son simétricos con respecto a un plano P si la recta que pasa por A y por B es perpendicular a P y el punto medio entre A y B pertenece a P.*

En el caso en que se trate de un punto que pertenezca al lugar geométrico, su simétrico es él mismo.

En particular es importante conocer la simetría de algún lugar geométrico con respecto al origen, o a los ejes o a los planos coordenados.

TEOREMA 1.1. *Dos puntos son simétricos con respecto al origen si sus coordenadas cartesianas correspondientes tienen el mismo valor absoluto pero diferente signo.*

En efecto, sea el punto de coordenadas $P(x, y, z)$ y sea el punto $Q(-x, -y, -z)$; el punto medio M entre P y Q tiene por coordenadas:

$$x_m = \frac{-x+x}{2}; \quad y_m = \frac{-y+y}{2}; \quad z_m = \frac{-z+z}{2}$$

Es decir:

$$M(0, 0, 0)$$

Q.E.D.

Los teoremas relativos a la simetría con respecto a los ejes y a los planos coordenados se enuncian sin demostración, pues se requieren conceptos de Geometría Analítica en el Espacio; sin embargo, con un poco de razonamiento pueden ser evidentes.

TEOREMA 1.2. *Dos puntos son simétricos con respecto a un eje coordenado si las coordenadas cartesianas correspondientes al eje son iguales y las otras dos son iguales en valor absoluto pero de diferente signo.*

TEOREMA 1.3. *Dos puntos son simétricos con respecto a un plano coordenado si cada una de sus coordenadas cartesianas correspondientes a los ejes coordenados contenidos en el plano son iguales y las del eje perpendicular son iguales en valor absoluto pero de signo diferente.*

EJERCICIO 1.1. Sea el punto de coordenadas cartesianas $R(-1,4,2)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico a R con respecto a

a) el origen
b) el eje z
c) el plano XY

SOLUCIÓN:

a) $T\,(1,-4,-2)$
b) $U\,(1,-4,\ 2)$
c) $S\,(-1,\ 4,-2)$

En muchas ocasiones, ya sea por la dificultad en la medición o en los cálculos, resulta conveniente usar un sistema de referencia diferente al cartesiano.

DEFINICIÓN 1.9. *Todos los sistemas diferentes al cartesiano se llaman sistemas de coordenadas curvilíneas.*

Existen muchas coordenadas curvilíneas, de hecho, para algún problema en particular, puede inventarse un sistema de coordenadas curvilíneas. En lo que sigue se tratará con los sistemas más comúnmente empleados en ingeniería.

1.3 COORDENADAS POLARES

Para ubicar un punto en el plano, ya se recordó que un sistema de uso común es el cartesiano; sin embargo, otro utilizado con frecuencia es el polar, el cual consiste en un eje (el eje polar) y un punto fijo en él (el polo).

DEFINICIÓN 1.10. *Se llama semieje de medición a la parte del eje polar que va del polo hacia donde indica el sentido del eje.*



FIGURA 1.7

Las coordenadas polares de un punto son $P(r, \theta)$; donde r es la longitud del radio vector y θ es el argumento, de acuerdo con las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1.11. *El radio vector de un punto es el segmento de recta que va desde el polo hasta el punto. Por abuso en el lenguaje se usará indistintamente radio vector y longitud del radio vector.*

DEFINICIÓN 1.12. *Un argumento de un punto es el ángulo que forman el semieje de medición y el radio vector.*

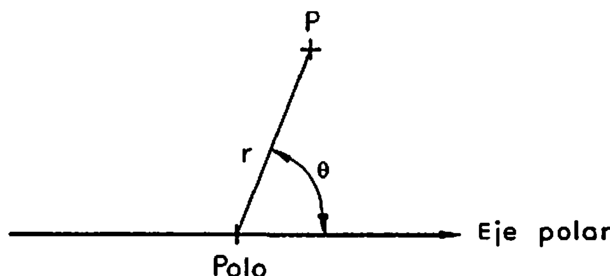


FIGURA 1.8

Obsérvese que se ha empleado el artículo indefinido *un* en la definición 1.12 para hablar del argumento de un punto, en virtud de que un ángulo puede medirse positivamente, negativamente, o bien, con múltiplos de 2π. Por otra parte, la longitud del radio vector debería ser siempre positiva; sin embargo, si se definen longitudes negativas puede establecerse una correspondencia muy útil entre las coordenadas cartesianas y las polares por medio de las ecuaciones de transformación que se explicarán posteriormente.

DEFINICIÓN 1.13. *Si un punto tiene por coordenadas polares $P(r, \theta)$, dicho punto puede representarse también por $P(-r, \theta \pm \pi)$.*

Las observaciones anteriores provocan que la relación existente entre los puntos de un plano y sus coordenadas polares sea unívoca; es decir, unas coordenadas polares representan un solo punto, mientras que un punto puede estar representado por una infinidad de coordenadas polares.

EJERCICIO 1.2. Representar en una figura el punto A que tiene por coordenadas polares A $(3,45°)$.

SOLUCIÓN:

Para representar un punto en el plano cuando se conocen unas de sus coordenadas polares, conviene primero localizar el argumento para que sobre la semirrecta dibujada se mida la longitud del radio vector a partir del polo. Así, para el punto A, se dibuja la semirrecta a $45°$:

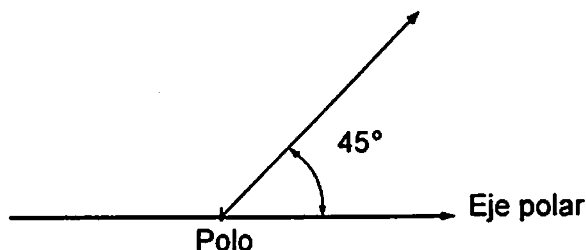


FIGURA 1.9

Finalmente, se mide la longitud 3 sobre la semirrecta dibujada.

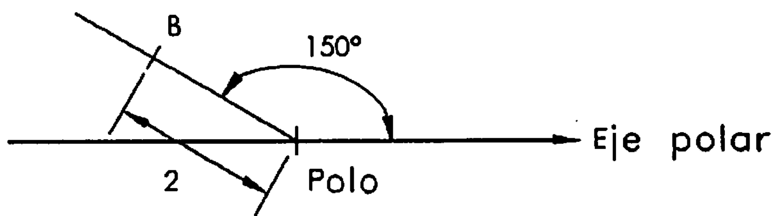


FIGURA 1.10

EJERCICIO 1.3. Representar gráficamente al punto que tiene unas coordenadas polares B $(-2,-30°)$.

SOLUCIÓN:

Como se explicó, lo que conviene es dibujar primero la semirrecta sobre la que se ubicará el punto. En este caso, dado que la longitud del radio vector es negativa, dicha semirrecta se dibujará midiendo $-30° + 180° = 150°$:

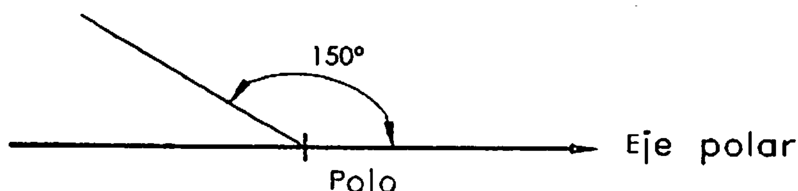


FIGURA 1.11

Ahora sobre esta semirrecta se miden las dos unidades a partir del polo:

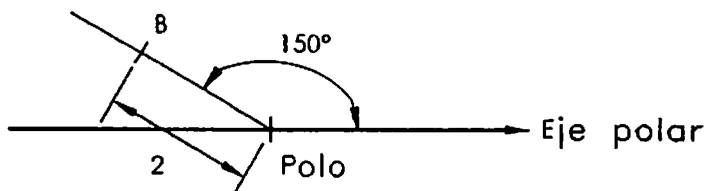


FIGURA 1.12

Aquí es conveniente hacer algunas observaciones:

— En los ejercicios anteriores se han utilizado grados para medir los ángulos, cuando en las definiciones se habló de radianes. Esto carece de importancia mientras se tenga congruencia en los cálculos. Por otra parte, en algunas aplicaciones de las coordenadas polares, por ejemplo en Cálculo, es indispensable trabajar con radianes.

— En este sistema de referencia, en el eje polar no existe un semieje positivo y uno negativo, por ello se definió a una de sus partes como semieje de medición y también se habló ya del significado de la longitud de un radio vector negativo. Para mejor comprensión de esto, véase en la figura 1.13 la representación gráfica del punto $P\ (-1,\ \pi)$:

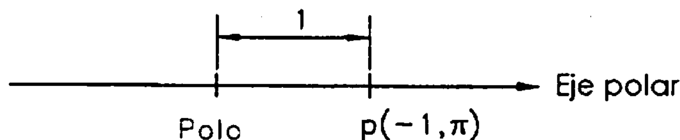


FIGURA 1.13

Como se puede deducir, no existe un eje perpendicular al eje polar ni ha sido necesario; no obstante, para determinar algunas características de puntos o curvas, es conveniènte dibujarlo. A este eje suele llamársele *eje copolar* o *eje a* 90 *grados* (Figura 1.14).

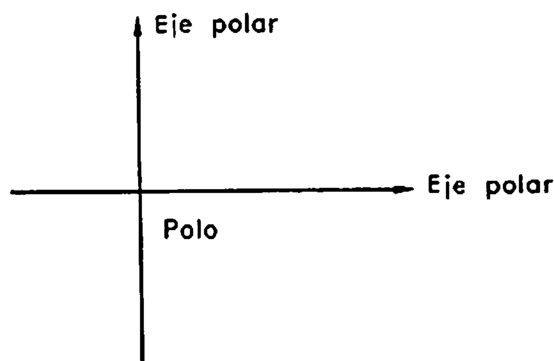


FIGURA 1.14

— La relación unívoca entre los puntos de un plano y sus coordenadas polares en ocasiones resulta inconveniente, para evitar esto suele emplearse el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 1.14. *Se llaman coordenadas polares principales de un punto a aquellas en donde el radio vector tiene longitud positiva y argumento* $0 \leq \theta < 2\pi$.

EJERCICIO 1.4. Sea el punto de coordenadas polares:

$$M\left[-\sqrt{7},\frac{55\pi}{6}\right]$$

Representar a este punto por otras tres coordenadas polares diferentes, entre ellas las principales.

SOLUCIÓN:

La primera forma de representación puede ser cambiando el signo a r:

$$M\left[\sqrt{7},\frac{49\pi}{6}\right]$$

La segunda, si se deja el signo de r pero se modifica el argumento:

$$M\left[-\sqrt{7},\frac{67\pi}{6}\right]$$

Para la tercera, que deben ser las coordenadas principales, primero se convierte a positivo r:

$$M\left[\sqrt{7},\frac{61\pi}{6}\right]$$

Ahora, la longitud del radio vector ya es positiva, pero el argumento no es el principal. Para llegar a él, se requiere restarle 2π tantas veces como sea necesario:

$$M\left[\sqrt{7},\frac{61\pi}{6}-5(2\pi)\right]$$

finalmente:

$$M\left[\sqrt{7},\frac{\pi}{6}\right]$$

1.4 COORDENADAS CILÍNDRICAS

Al definir las coordenadas cartesianas, se habló de la necesidad de aumentar un eje perpendicular a los dos del sistema cartesiano en el plano, con objeto de representar puntos en el espacio. De manera similar, el sistema polar puede extenderse al espacio al agregar un eje perpendicular al plano polar que pasa por el polo, el eje de las cotas (Figura 1.15):

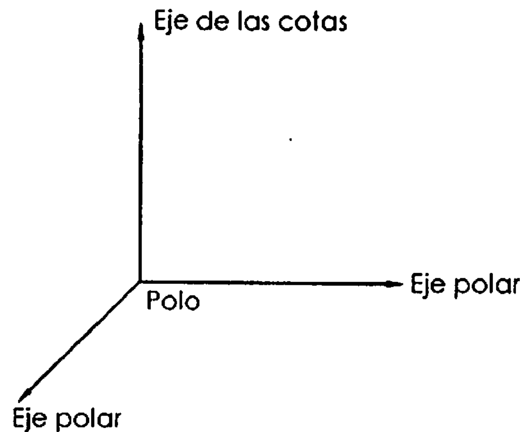


FIGURA 1.15

A este sistema se le llama *sistema cilíndrico* y a las coordenadas que en él se miden se les conoce como *coordenadas cilíndricas*.

Las coordenadas cilíndricas de un punto son $P\ (r,\ \theta,\ z)$, donde la primera cantidad es el radio vector ya descrito en las coordenadas polares; la segunda, el argumento también usado en las coordenadas polares; y la tercera, la cota utilizada en las cartesianas.

Como las cotas son las mismas que las usadas en las coordenadas cartesianas, el eje de las cotas sí tiene un semieje positivo y otro negativo.

Para ubicar un punto en coordenadas cilíndricas, conviene primero localizar la semirrecta en el plano polar midiendo el ángulo del argumento, a continuación se mide la longitud del radio vector y finalmente la cota, positiva o negativa, en el sentido del eje o contrario a él.

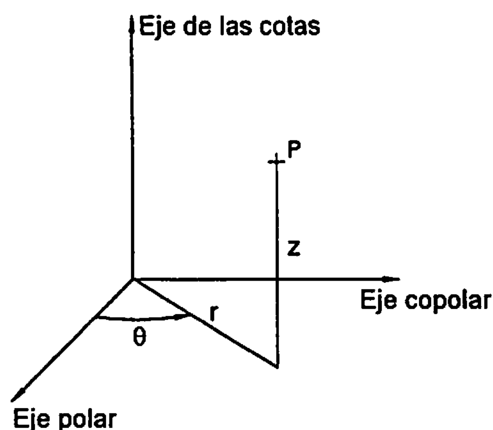


FIGURA 1.16

El nombre de sistema cilíndrico se debe a que un punto se localiza por medio de la intersección entre un cilindro circular recto de radio r, un semiplano que parte del eje de las cotas y que forma un ángulo θ con el plano que contiene al eje polar y al eje de las cotas, y un plano paralelo al eje polar y que tiene una distancia z con dicho plano (Figura 1.17).

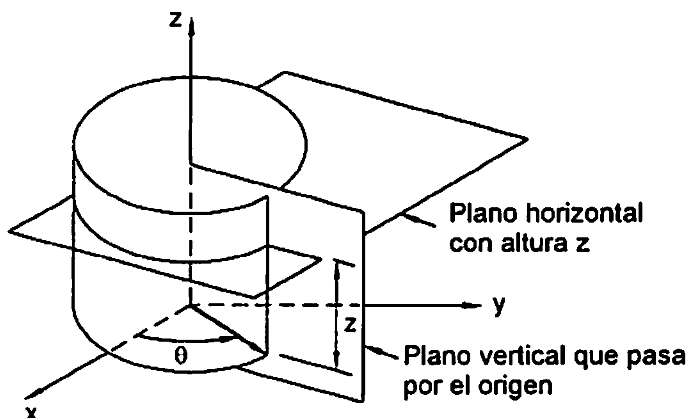


FIGURA 1.17

Todas las observaciones que se hicieron sobre las coordenadas polares son válidas para las cilíndricas; es decir, r puede ser positivo, negativo o nulo; θ también puede tomar cualquier valor real, y z desde luego que puede tomar cualquier valor.

1.5 COORDENADAS ESFÉRICAS

Otro sistema también muy utilizado en el espacio es el *esférico*. Éste consiste en tres ejes perpendiculares entre sí, como en el cartesiano, y para lograr una equivalencia con dicho sistema, se les seguirá llamando el eje de las abscisas, el de las ordenadas y el de las cotas. La diferencia entre los dos sistemas es que en el esférico no son tres distancias las coordenadas, sino $P(\rho, \theta, \phi)$; donde ρ es la distancia del origen al punto en estudio. Al segmento que une estos dos puntos también se le llama *radio vector*, θ es el mismo ángulo usado en las coordenadas cilíndricas y ϕ es el ángulo entre el semieje positivo de las cotas y el radio vector. (Figura 1.18).

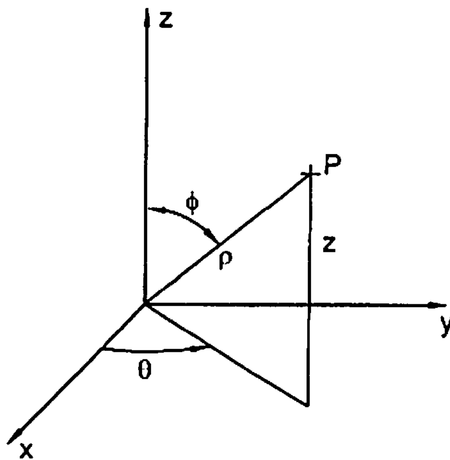


FIGURA 1.18

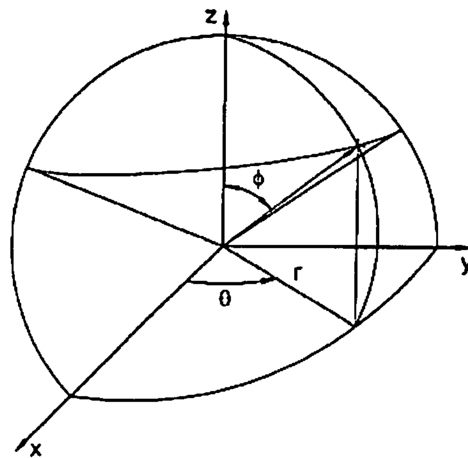


FIGURA 1.19

Para lograr precisión en la localización de puntos en el espacio, se restringirá el intervalo de medición de las coordenadas esféricas a valores positivos de ρ, y $0 \leq \phi \leq \pi$. Con las restricciones anteriores puede representarse cualquier punto en el espacio, pero otros autores podrían modificar los intervalos; sin embargo, en lo que sigue se respetarán estas especificaciones.

El nombre de *coordenadas esféricas* se debe a que la localización de un punto en el espacio se obtiene como la intersección de una esfera de radio ρ, un semicono circular recto con vértice en el origen y un semiplano que contiene al eje de las cotas, similar al descrito en las coordenadas cilíndricas (Figura 1.19).

La manera de localizar un punto en el sistema esférico tiene parecido con la forma de ubicar un punto en la corteza terrestre. Las coordenadas geográficas son la altitud, la latitud y la longitud; sólo que la altitud de un punto se mide a partir del nivel medio del mar y no desde el centro de la Tierra; la latitud, desde el Ecuador, distinguiéndose en latitud norte y latitud sur, a diferencia del ángulo ϕ que se mide desde el semieje positivo de las cotas, que equivaldría al *eje polar*; finalmente, la longitud se mide con origen en el meridiano de Greenwich. Esta coordenada si es equivalente al ángulo θ. Quizás la similitud anterior hace que algunos autores llamen al ángulo ϕ longitud y al ángulo θ, colatitud.

Una observación importante es que las coordenadas usadas en Geometría Analítica consisten en parejas o ternas ordenadas de números; es decir, sí importa y mucho el orden. Por ello debe tenerse precaución con el empleo de las coordenadas esféricas, pues algunos autores las definen en el orden (ρ, ϕ, θ). Esta observación será más clara cuando se estudien las coordenadas curvilíneas en cálculo.

EJERCICIO 1.5. Representar en un sistema cilíndrico al punto $A\ (4,\ 60°, -1)$.

SOLUCIÓN:

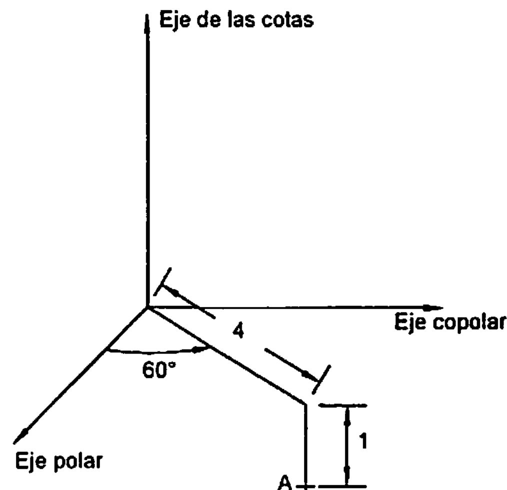


FIGURA 1.20

EJERCICIO 1.6. Representar en un sistema esférico al punto $B\left(7,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$, si las coordenadas están expresadas en el orden $(\rho,\ \theta,\ \phi)$.

SOLUCIÓN:

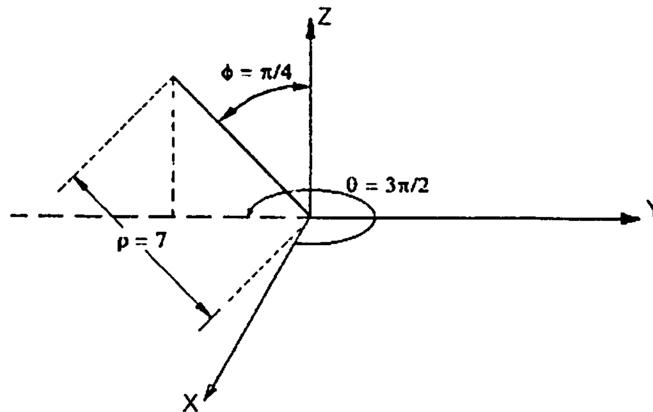


FIGURA 1.21

1.6 ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN

1.6.1 DE COORDENADAS CARTESIANAS A POLARES Y VICEVERSA

La obtención de las ecuaciones de transformación entre estos sistemas de referencia suele hacerse por medio de una figura como la siguiente:

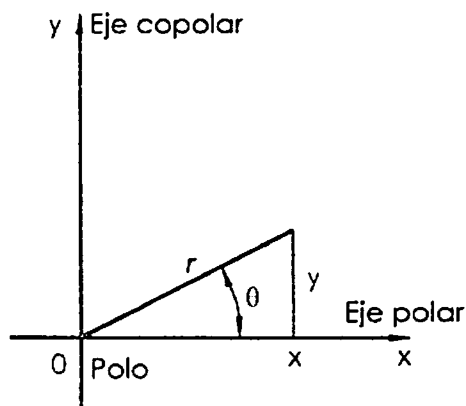


FIGURA 1.22

De la figura se tiene que:

$$x = r \cos \theta \qquad \dots (1)$$

$$y = r \text{ sen } \theta \qquad \ldots (2)$$

que son las expresiones que permiten conocer las coordenadas cartesianas de un punto si se conocen sus coordenadas polares.

Por otra parte, de la misma figura:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \ldots (3)$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{y}{x} \qquad \ldots (4)$$

que son las expresiones con las que pueden determinarse las coordenadas polares de un punto si se conocen sus coordenadas cartesianas. Aquí es pertinente hacer las siguientes observaciones:

— Las expresiones de transformación se determinaron con un punto localizado en el primer cuadrante, pero son válidas para un punto cualquiera. Como un ejercicio interesante, el lector puede comprobar su validez para puntos ubicados en otros cuadrantes, empleando identidades trigonométricas.

— Al obtener la expresión del radio vector se extrae raíz cuadrada y no se le asigna el doble signo al cual se está obligado a analizar. Esto se consigue con la definición de longitudes negativas ya explicadas.

— Para la obtención del argumento, se usa la expresión ang tan que establece una relación que no es función, lo que puede provocar complicaciones en su determinación, sobre todo si irreflexivamente se utiliza para ello una calculadora. Por tanto se recomienda ampliamente que nunca se utilice esta expresión sin razonar, determinando primero en qué cuadrante se sitúa el punto para saber el intervalo en el que se encuentra el argumento.

EJERCICIO 1.7. Obtener las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares son:

$$A\,(4,\pi), \quad B\,(3,0), \quad C\,(-2,\tfrac{7\pi}{6}) \quad D\,(-5,-\tfrac{\pi}{2})$$

SOLUCIÓN:
Al utilizar directamente las expresiones correspondientes:

$$A\,(-4,\,0); \quad B\,(3,0); \quad C\,(\sqrt{3},1); \quad D\,(0,5)$$

En todos estos casos pudo determinarse estas coordenadas sin necesidad de emplear las ecuaciones. Por ejemplo, para el punto D, el argumento es $-\frac{\pi}{2}$, de manera que al ubicar la semirrecta, ésta se dirige hacia la parte negativa del eje de las ordenadas, pero como el radio vector tiene longitud negativa, su medición deberá hacerse en el sentido diametralmente opuesto, entonces, el punto D se localiza en la parte positiva del eje de las ordenadas a una distancia de cinco unidades del origen.

EJERCICIO 1.8. Sean los puntos de coordenadas cartesianas:

$$A\,(1,\sqrt{3}),\quad B\,(-1,\sqrt{3}),\quad C\,(1,-\sqrt{3}),\quad D\,(-1,-\sqrt{3}).$$

SOLUCIÓN:

Si se usan directamente las ecuaciones de transformación, los puntos A y D tendrían como coordenadas polares:

$$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$$

y las coordenadas de los puntos B y C serían:

$$\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$$

Con un poco de razonamiento, puede observarse que esto no es posible, puesto que A está en el primer cuadrante, mientras que D está en el tercer cuadrante y no pueden tener las mismas coordenadas polares ya que entonces el sistema polar no serviría. Sin embargo, al notar que el punto D se sitúa en el tercer cuadrante, debe comprenderse que el argumento toma un valor entre π y $\frac{3\pi}{2}$. Para saber cuál es ese valor, conviene dibujar una figura:

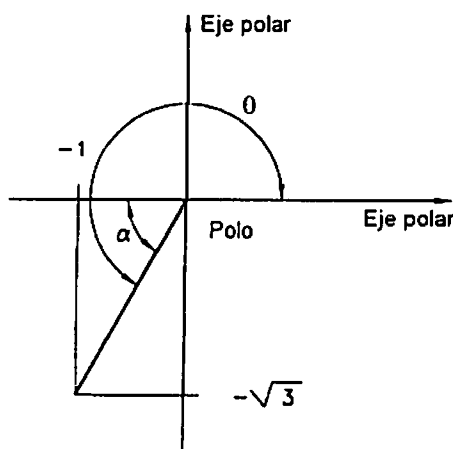


FIGURA 1.23

De manera que al aplicar la fórmula ang tan $\frac{y}{x}$ se tiene que el ángulo calculado es α, pues es el que tiene como cateto opuesto $-\sqrt{3}$ y como cateto adyacente -1.

Por lo que el argumento es

$$\theta = \pi + \alpha$$

entonces, unas coordenadas polares de D son $D\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$

De manera similar se razona para el punto B, por lo que se tiene:

$$A\left(2, \frac{\pi}{3}\right);$$

$$B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$C\left(2, \frac{5\pi}{3}\right);$$

$$D\left(2, \frac{4\pi}{3}\right).$$

1.6.2 DE COORDENADAS CARTESIANAS A CILÍNDRICAS Y VICEVERSA

Dado que las coordenadas cilíndricas se pueden considerar como las polares en el espacio, las ecuaciones de transformación son las mismas que las deducidas en el caso anterior, tomando en cuenta, además, que la cota de las coordenadas cartesianas es la misma que la de las polares, entonces las expresiones quedan:

$$x = r \cos \theta \qquad \ldots (1)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \qquad \ldots (2)$$

$$z = z \qquad \ldots (3)$$

que permiten la transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \dots (4)$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{y}{x} \qquad \dots (5)$$

$$z = z \qquad \dots (6)$$

que son las expresiones para transformar de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

1.6.3 DE COORDENADAS CARTESIANAS A ESFÉRICAS Y VICEVERSA

Si un punto tiene coordenadas cartesianas $P(x,y,z)$ y coordenadas esféricas $P(\rho, \theta, \phi)$, puede observarse la relación entre estos dos sistemas en la siguiente figura:

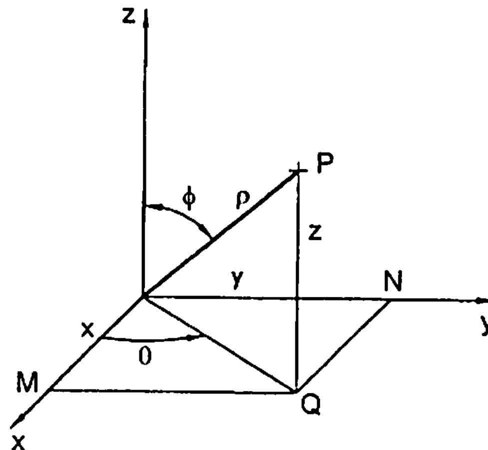


FIGURA 1.24

En primer lugar, del triángulo OPQ se deduce que $OQ = \rho$ sen ϕ. Ahora del triángulo OQM:

$$x = OQ \cos \theta$$

$$y = OQ \text{ sen } \theta$$

tomando en cuenta el valor de OQ:

$$x = \rho \text{ sen } \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta$$

además, del mismo triángulo OPQ:

$$z = \rho \cos \phi$$

por lo que las ecuaciones de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas quedan:

$$x = \rho \text{ sen } \phi \cos \theta \qquad \ldots (1)$$

$$y = \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \qquad \ldots (2)$$

$$z = \rho \cos \phi \qquad \ldots (3)$$

Por otra parte, como la longitud θ corresponde al mismo ángulo que el de las coordenadas cilíndricas, su expresión será la misma. Ahora, del triángulo OQM de la figura 1.24:

$$OQ^2 = x^2 + y^2$$

pero, del triángulo OPQ:

$$\rho^2 = OQ^2 + z^2$$

llevando el valor de OQ^2:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

entonces:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Finalmente, para la colatitud, una expresión puede obtenerse del triángulo OPQ de la misma figura:

$$\phi = \text{ang cos } \frac{z}{\rho}$$

pero, tomando en cuenta el valor de ρ deducido anteriormente:

$$\phi = \text{ang cos } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Entonces, las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a esféricas son:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \ldots (4)$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{y}{x} \qquad \ldots (5)$$

$$\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \ldots (6)$$

EJERCICIO 1.9. Sean los puntos

$$A\ (4,\pi,-3), \quad B\ (8,45°,0), \quad C\ (0,\frac{3\pi}{7},1)$$

expresados en coordenadas cilíndricas. Obtener sus coordenadas cartesianas.

SOLUCIÓN:

Para estas transformaciones basta con aplicar las expresiones directamente, sólo conviene reflexionar con el punto C, que al tener el valor de r nulo, lo que significa es que dicho punto se localiza sobre el eje de las cotas, sin importar el valor del argumento.

Las coordenadas cartesianas son:

$$A\ (0,-4,-3);$$

$$B\ (4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 0);$$

$$C\ (0,\ 0,\ 1).$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1. Sea el punto A con coordenadas cartesianas derechas $A(3,-5)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en el sistema izquierdo obtenido al cambiar el sentido del eje de

a) las ordenadas
b) las abscisas

Si se cambia el sentido a los dos ejes, ¿el sistema resultante es izquierdo o derecho?

1.2. Sea un sistema cartesiano derecho en el espacio. Si se cambia el sentido en el eje de las abscisas y en el de las cotas, ¿el sistema resultante es derecho o izquierdo?

1.3. Sean los puntos $A(2, -1, 3)$ y $B(-4, 3, 5)$, expresados en coordenadas cartesianas. Determinar el punto P con respecto al cual A y B son simétricos.

1.4. Sea el punto $A(2, -4, -1)$. Determinar las coordenadas del punto B que es simétrico a A con respecto al punto $P(1, -1, 3)$.

1.5. Transformar de coordenadas polares a cartesianas:

$$A(\sqrt{2},45°),\quad B(3,-60°),\ C(-2,120°),\ D(-1,-180°),\ E(0,123°).$$

1.6. Transformar de coordenadas cartesianas a polares:

$$A(4,4),\ B(-4,-4),\ C(-1,\sqrt{3}),\quad D(\sqrt{3},-1),\ E(0,-8).$$

1.7. Para el punto P de coordenadas cartesianas $P(-4,0)$, determinar tres pares de coordenadas polares, entre ellas las principales.

1.8. Demostrar que las ecuaciones de transformación de las coordenadas cilíndricas de un punto $P(\gamma,\ \theta\ , z)$ a sus coordenadas esféricas $P(\rho,\ \theta\ , \phi)$, son:

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\theta = \theta$$

$$\phi = \text{ang tan } \frac{\gamma}{z}$$

1.9. Transformar las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos a coordenadas cilíndricas:

$$A(3,3,3),\ B(-1,\sqrt{3},0),\ C(0,-2,-3),\ D(0,0,7),\ E(\sqrt{2},-\sqrt{2},2).$$

1.10. Transformar las coordenadas cilíndricas de los siguientes puntos a coordenadas cartesianas:

$A(1,45°,-2)$, $B(3,-60°,-1)$, $C(4,0°,-8)$, $D(-5,-720°,-4)$ $E(0,0°,0)$.

1.11. Transformar de coordenadas esféricas a cartesianas:

$A(\sqrt{2}, 45°, 45°)$, $B(4, -60°, 120°)$, $C(2, 2745°, 180°)$, $D(5, 90°, 90°)$, $E(0, 321°, 123°)$.

1.12. Transformar de coordenadas cartesianas a esféricas:

$A(4, 4, 4)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(0, 0, -5)$, $D(0, -7, 0)$, $E(-1, -\sqrt{3}, 0)$.

1.13. Calcular la distancia entre los puntos $A(-1, 45°, 1)$, expresado en coordenadas cilíndricas, y $B(\sqrt{2}, 225°, 135°)$, expresado en coordenadas esféricas.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRA VECTORIAL

2.1 INTRODUCCIÓN

El ingeniero utiliza, para su trabajo, diferentes entes matemáticos que le permiten representar a la naturaleza. En muchas ocasiones basta con conocer la magnitud de una distancia, el valor de la temperatura, etc. Sin embargo, cuando se trabaja con fuerzas no es suficiente conocer su magnitud, también es necesaria la determinación de su dirección y de su sentido, y en algunos casos, hasta de su posición. De esto se desprenden las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.1. *Se llama cantidad escalar a aquella que solamente posee magnitud.*

DEFINICIÓN 2.2. *Una cantidad es vectorial si posee magnitud, dirección y sentido.*

Algunos autores definen a un vector como una cantidad que tiene magnitud y dirección, considerando que en la dirección va implícito el concepto de sentido. Para distinguir estas dos características, se puede decir que un vector que tiene la dirección del eje de las cotas puede tener el mismo sentido del eje o el sentido contrario.

La razón de la preferencia de esos autores en la definición susodicha está en que tanto los ángulos directores como los cosenos directores, que se definirán en estas notas, permiten especificar simultáneamente la dirección y el sentido de un vector.

Por otra parte, en lo que sigue se trabajará con los vectores ajustándose a la definición 2.2, aunque existen otras definiciones, las cuales son empleadas dependiendo del curso que se trate; por ejemplo, en Álgebra Lineal los vectores son elementos de una estructura algebraica llamada *espacio vectorial* y deben cumplir diez axiomas de dicha estructura. La definición aquí enunciada se empleará expresamente por su utilidad en la Geometría. En lo que sigue, a los vectores se les representará con una línea arriba de la letra, por ejemplo: $\bar{a}$, $\bar{u}$, $\bar{N}$.

DEFINICIÓN 2.3. *Se llama segmento dirigido a un segmento de recta en el que se ha asignado un punto origen y un punto extremo.*

En forma gráfica un segmento dirigido se representa con una flecha. En la figura 2.1, el punto origen es A y el punto extremo es B.

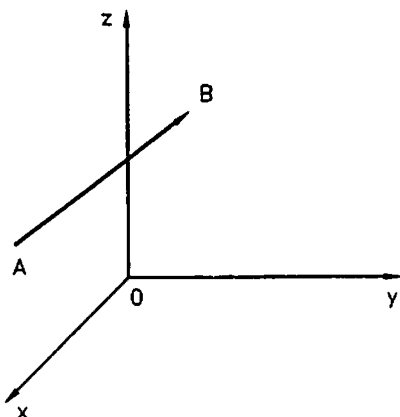


FIGURA 2.1

2.2 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UN VECTOR

En virtud de que un vector tiene magnitud, dirección y sentido, pero no importa su posición en el espacio, puede representarse geométricamente con el segmento dirigido que convenga; es decir, un vector puede representarse por medio de una infinidad de segmentos dirigidos, todos aquellos que tengan el tamaño del vector, su dirección y su sentido, por ello, a los vectores así definidos se les llama *vectores libres*.

2.3 REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR

Para representar analíticamente a un vector se usa una terna ordenada de números reales $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, a los cuales se les denomina *componentes escalares del vector* o *números directores del vector.* Cuando se trabaja en el plano, puede utilizarse con una pareja ordenada de números reales o con una terna que tiene una de las componentes nula, dependiendo del plano en el que se represente. En un aspecto abstracto, un vector suele definirse como una *eneada* ordenada de números reales, pero se insiste en el hecho de que en estas notas se usarán los vectores con fines geométricos.

DEFINICIÓN 2.4. *Sea el vector* $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *Si dicho vector se representa por el segmento dirigido* $\overline{AB}$ *donde su punto origen es* $A(a_1, a_2, a_3)$ *y su punto extremo* $B(b_1, b_2, b_3)$; *las componentes escalares del vector son:* $v_1 = b_1 - a_1$; $v_2 = b_2 - a_2$; $v_3 = b_3 - a_3$.

EJERCICIO 2.1. Sea el segmento dirigido $\overline{PQ}$, donde: $P(-1, 3, 0)$, $Q(0, -3, 4)$. Determinar los componentes escalares del vector representado por el segmento dirigido.

SOLUCIÓN:

$$\bar{a} = (0 -(-1), -3 -3, 4 - 0) = (1, -6, 4).$$

EJERCICIO 2.2. Sea el vector $\bar{N} = (0, 0, 7)$. Determinar las coordenadas de los puntos origen y puntos extremo de dos segmentos dirigidos que representen al vector.

SOLUCIÓN:
Un segmento dirigido puede tener como punto origen el origen del sistema coordenado, entonces su punto extremo es $(0, 0, 7)$, ya que $(0, 0, 7) = (0 - 0, 0 - 0, 7 - 0)$.

Otro segmento dirigido puede ser el que tiene por punto origen $M\,(1, 1, 1)$, y como punto extremo $N\,(1, 1\ 8)$.

EJERCICIO 2.3. Sea el vector $\bar{u} = (-4, 8, 0)$. Si un segmento dirigido que lo representa tiene como punto origen a $A\,(2, -1, 5)$; obtener las coordenadas del punto extremo del segmento.

SOLUCIÓN:
Como los números directores del vector se obtienen por las diferencias de las respectivas coordenadas de los puntos limitantes del segmento dirigido, entonces $b_i = a_i + u_i$ para cada una de las componentes. Finalmente:

$$b_1 = -4 + 2 = -2; \quad b_2 = 8 + (-1) = 7; \quad b_3 = 0 + (-5) = -5.$$

El punto es

$$B(-2, 7, -5).$$

2.4 OPERACIONES CON VECTORES

DEFINICIÓN 2.5. *Se llama vector nulo o vector cero a* $\bar{0} = (0, 0, 0)$. *El vector nulo tiene magnitud nula y no tiene definida ni su dirección ni su sentido.*

La representación analítica escogida permite determinar las características geométricas de un vector; es decir, su magnitud o módulo, su dirección y su sentido.

Como se ha dicho, un vector es libre porque puede representarse en cualquier posición del espacio por medio de un segmento dirigido que tenga el módulo del vector, su dirección y su sentido; sin embargo, existen otro tipo de vectores muy útiles, por ejemplo, los vectores de posición que se definirán inmediatamente; pero obsérvese que si se dice "un vector" sin especificar que es de posición, o con alguna otra distinción, se considerará como *vector libre.*

DEFINICIÓN 2.6. *Se llama vector de posición de un punto* $P\ (p_1, p_2, p_3)$ *aquel que tiene su punto origen en el origen de coordenadas y su punto extremo en el punto P.*

Su representación es igual a la de cualquier vector, pero se diferencia por añadirle la especificación de posición. Es obvio que las componentes escalares del vector *de posición* del punto *P* son iguales, numéricamente hablando, a las coordenadas de *P*. Entonces:

$$\bar{p} = (p_1, p_2, p_3).$$

2.4.1 MAGNITUD O MÓDULO DE UN VECTOR

La magnitud o módulo de un vector es el *tamaño* de cualquier segmento dirigido que lo representa. La determinación del módulo puede hacerse por métodos gráficos, pero en forma analítica se obtiene por la expresión:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

donde a_1, a_2, a_3 son las componentes escalares del vector.

Algunos autores le llaman al módulo de un vector "su norma". Esta designación no es incorrecta, pero es más acorde con un curso de Álgebra Lineal donde no se alude a un significado geométrico directo.

La expresión anterior tiene su justificación en la aplicación reiterada del teorema de Pitágoras.

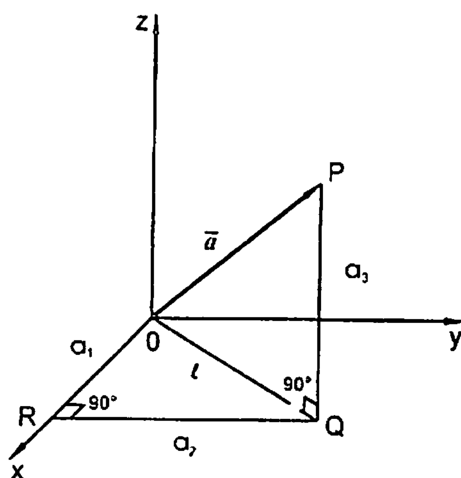


FIGURA 2.2

En la figura 2.2 se ha representado al vector $\bar{a}$ con el segmento dirigido $\overline{OP}$. Se ha elegido como su punto origen al origen del sistema coordenado, con lo cual no se pierde generalidad por las razones expuestas. En dicha figura pueden observarse las distancias a_1, a_2 y a_3 que son las componentes escalares del vector. Del triángulo rectángulo OPQ se tiene

$$|\bar{a}| = \sqrt{l^2 + a_3^2}$$

Por otra parte, del triángulo ORQ, rectángulo también:

$$l = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Obsérvese que el vector nulo tiene magnitud cero.

DEFINICIÓN 2.7. *Un vector es unitario si su módulo es igual a la unidad.*

En particular, los siguientes tres vectores unitarios son muy útiles en el Álgebra Vectorial:

$$i = (1, 0, 0); \quad j = (0, 1, 0); \quad k = (0, 0, 1).$$

Es de suma importancia no confundir las notaciones de vector, de punto y de escalar; sin embargo, los vectores unitarios arriba definidos son tan conocidos, que se permite dejar de escribir la línea superior a las letras *i*, *j* o *k*.

2.4.2 DIRECCIÓN Y SENTIDO DE UN VECTOR

Como se explicó en líneas anteriores, algunos autores prefieren definir como dirección a lo que aquí llamamos dirección y sentido. La razón es que para determinarlas analíticamente se emplean los mismos elementos matemáticos.

DEFINICIÓN 2.8. *Los ángulos directores de un vector son los que forma un segmento dirigido que representa a dicho vector con los ejes coordenados.*

Así, en la figura 2.3 pueden observarse los ángulos directores del vector $\bar{v}$ que son α, β y γ; donde α es el ángulo que forma el segmento dirigido con el eje de las abscisas; β, el formado con el eje de las ordenadas y γ, con el de las cotas. Con esta definición, los ángulos directores varían entre cero y ciento ochenta grados, y como puede comprenderse, la dirección y el sentido estarán determinados.

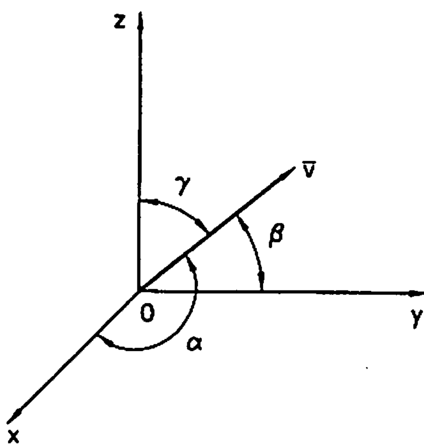


FIGURA 2.3

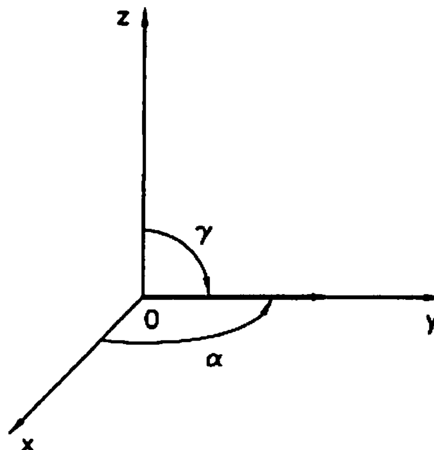


FIGURA 2.4

EJERCICIO 2.4. Sea un vector que tiene por ángulos directores: $\alpha = 90°$, $\beta = 0°$, $\gamma = 90°$; determinar los ángulos directores de otro vector que tenga la misma dirección pero sentido opuesto.

SOLUCIÓN:

Cualquier vector que presente los ángulos directores que se conocen tiene la dirección y el sentido del eje de las ordenadas, como puede apreciarse en la figura 2.4. Entonces, para que otro vector tenga la dirección del mismo eje, pero de sentido opuesto, sus ángulos directores:

$$\alpha = 90°, \quad \beta = 180° \quad y \quad \gamma = 90°.$$

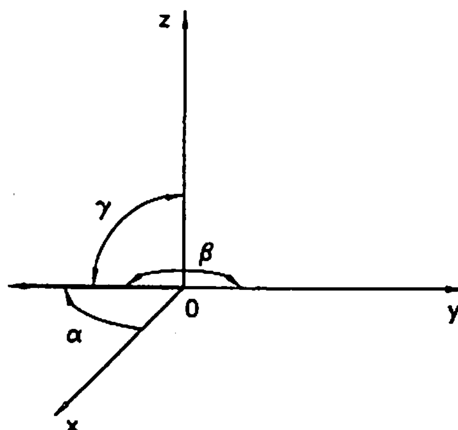


FIGURA 2.5

DEFINICIÓN 2.9. *Los cosenos directores de un vector son los cosenos de sus ángulos directores.*

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}$$

Como es lógico, un coseno director puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo de que su ángulo director correspondiente sea agudo, obtuso o recto, respectivamente. Si un coseno director es igual a la unidad, el ángulo director es cero y si el coseno director es igual a uno pero con signo negativo, su correspondiente ángulo director es de ciento ochenta grados.

Un vector nulo tiene dirección y sentido indeterminados.

Nótese que los vectores unitarios *i*, *j* y *k* tienen la dirección y el sentido de los ejes de las abscisas, de las ordenadas y de las cotas, respectivamente.

TEOREMA 2.1. *Sea el vector no nulo* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$. *Entonces sus cosenos directores cumplen con* $\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$.

En efecto:

$$\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = \sqrt{\frac{a_1^2}{|\bar{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\bar{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\bar{a}|^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\bar{a}|^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{|\bar{a}|^2}{|\bar{a}|^2}} =$$

$$= 1 \text{ ya que } |\bar{a}| \neq 0$$

Q.E.D

COROLARIO 2.1. *Un vector unitario tiene por componentes escalares sus cosenos directores.*

La demostración es obvia.

EJERCICIO 2.5. Determinar los ángulos y los cosenos directores del vector $\bar{v} = (0, 0, -2)$.

SOLUCIÓN:

Para la solución de este ejercicio no es necesario aplicar las expresiones analíticas, pues basta con observar que el vector tiene sus primeras dos componentes escalares nulas y la tercera no nula; por lo tanto, su dirección es la del eje de las cotas.

Por otra parte, al tener el vector su tercer número director negativo y los otros dos nulos, significa que su sentido es contrario al del eje de las cotas. No obstante las consideraciones anteriores, se obtendrán sus características empleando las expresiones:

$$|\bar{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{0}{2} = 0;$$

$$\cos\beta = \frac{0}{2} = 0;$$

$$\cos\gamma = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ahora para los ángulos directores:

$$\alpha = \beta = \text{ang cos } 0 = 90°;$$

$$\gamma = \text{ang cos } (-1) = 180°.$$

EJERCICIO 2.6. Sea un vector $\bar{u}$ del que se conocen dos de sus cosenos directores

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2};$$

calcular el otro de sus cosenos directores.

SOLUCIÓN:

De acuerdo con la expresión $\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$, si se eleva al cuadrado en ambos miembros:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Entonces:

$$\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$$

Sustituyendo:

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Finalmente:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

Obsérvese que existe otra solución si se considera el signo negativo de la raíz.

EJERCICIO 2.7. Determinar los ángulos directores de un vector que tenga sus números directores positivos y que sus cosenos directores sean iguales.

SOLUCIÓN:

Sea el vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$; para que $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$, debe cumplirse que $a_1 = a_2 = a_3$; entonces $\bar{a} = (a_1, a_1, a_1)$; $a_1 \neq 0$, por lo tanto,

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_1^2 + a_1^2}} =$$

$$= \frac{a_1}{\sqrt{3a_1^2}} =$$

$$= \frac{a_1}{a_1\sqrt{3}}$$

y como $a_1 \neq 0$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

finalmente:

$$\alpha = \beta = \gamma = 54.74°$$

DEFINICIÓN 2.10. *Dos vectores* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *son iguales si y sólo si* $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

DEFINICIÓN 2.11. *La adición de dos vectores es la operación entre* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, *de tal manera que* $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

2.4.3 PROPIEDADES DE LA ADICIÓN

TEOREMA 2.2. *Sean los vectores* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$; *entonces*:

i) $\bar{a} + \bar{b}$ *es un vector ... cerradura*;

ii) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ *... asociatividad*;

iii) $\exists\ \bar{o} = (0, 0, 0) \mid \bar{o} + \bar{a} = \bar{a}$ *... existencia de elemento idéntico*;

iv) $\forall\ \bar{a}\ \exists\ -\bar{a} \mid -\bar{a} + \bar{a} = \bar{o}$ *... existencia de elementos inversos*;

v) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ *... conmutatividad.*

La demostración de estas propiedades es muy obvia; sin embargo, a manera de ejemplo, se realizará la del inciso *ii*:

En efecto:

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (a_1, a_2, a_3) + [(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)] =$$

$$= (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) =$$

$$= [a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3)] =$$

$$= \left[(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, (a_3 + b_3) + c_3\right] =$$

$$= \left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c}$$

Q.E.D.

Observaciones:

— El conjunto de vectores y la operación de adición con las cinco propiedades enunciadas forma una estructura algebraica que se conoce como *grupo abeliano.*

— El elemento idéntico aditivo es el *vector nulo.*

— Cada vector tiene un inverso aditivo, el cual tiene las mismas componentes pero con signo contrario, con excepción del vector cero.

— La operación se llama *adición* y el resultado de ella es el *vector suma* o simplemente la *suma.*

2.4.4 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA ADICIÓN

Como se explicó, un vector puede representarse por una infinidad de segmentos dirigidos, de manera que puede usarse aquel que más convenga, tan sólo hay que tener la precaución de que el segmento tenga la magnitud, la dirección y el sentido del vector que representa. Esto hace que dos vectores cualesquiera puedan representarse siempre por medio de dos segmentos dirigidos que estén alojados en un plano. No se está hablando de un plano coordenado, si así conviene podría elegirse un sistema coordenado en el que se haga coincidir el plano que contiene a los vectores con alguno de los planos coordenados.

Por otra parte, los segmentos dirigidos seleccionados pueden colocarse de tal manera que sus puntos origen coincidan con algún punto conveniente. En lo que sigue se presentarán dos maneras de representar geométricamente la adición de vectores. Por facilidad, se usarán como sinónimos las palabras vector y segmento dirigido, aunque ya se sabe que no lo son.

i) Regla del paralelogramo. Los vectores sumandos se colocan de tal manera que sus puntos origen coincidan. Por el punto extremo de cada segmento se traza una recta paralela al otro vector, de modo que al cortarse con la paralela al otro vector formen un paralelogramo. En la figura 2.6, se representa el paralelogramo ABCD, donde dos lados adyacentes alojan a los vectores sumando $\bar{u}$ y $\bar{v}$. Posteriormente, se traza el segmento dirigido que tiene su origen en el punto común a los orígenes de los dos sumandos, A en la figura; y su extremo en el punto

de intersección de las dos paralelas, C en la figura. Ese segmento dirigido representa al vector suma $\bar{u} + \bar{v}$. Esta forma de representación geométrica es de mucha utilidad en Mecánica. Allí se le llama al vector suma *resultante*.

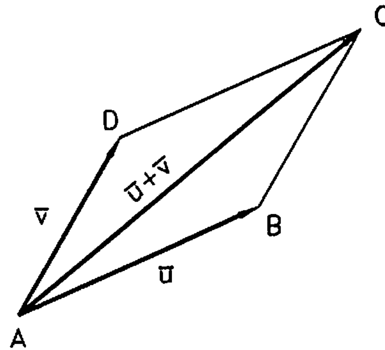


FIGURA 2.6

ii) Regla del triángulo. Otra forma de representación consiste en colocar dos segmentos dirigidos, de tal manera que el segundo sumando tenga su punto origen que coincida con el punto extremo del primero. El vector suma se representa con un segmento que tiene su origen en el origen del primero y su extremo en el extremo del segundo.

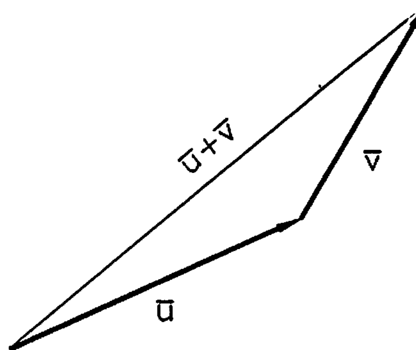


FIGURA 2.7

Esta representación permite sumar varios vectores con una misma figura, aunque no es posible asegurar que más de dos puedan estar alojados en un plano.

DEFINICIÓN 2.12. *Sean los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$; se llama sustracción a la operación:* $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$; *donde* $-\bar{b}$ *es el inverso aditivo de* $\bar{b}$.

Esta definición expresa que la sustracción de dos vectores se realiza cuando al vector minuendo se le agrega el inverso aditivo del sustraendo. La anterior consideración tiene sus ventajas desde

el punto de vista teórico; sin embargo, desde un enfoque práctico basta con restar las componentes del sustraendo a las componentes del minuendo; es decir, si

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3); \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3);$$

entonces:

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3).$$

EJERCICIO 2.8. Sean los vectores $\bar{m} = (-1, 2, 5)$; $\bar{n} = (3,-4, 7)$. Obtener:

a) $\bar{m} + \bar{n}$;

b) $\bar{m} - \bar{n}$;

c) las componentes escalares de un vector $\bar{x}$, de tal manera que $\bar{m} + \bar{x} = \bar{n}$.

SOLUCIÓN:

a) $\bar{m} + \bar{n} = (-1, 2, 5) + (3,-4, 7) =$

$= (2,-2, 12)$.

b) $\bar{m} - \bar{n} = (-1, 2, 5) - (3,-4, 7) =$

$= (-4, 6,-2)$.

c) Si $\bar{m} + \bar{x} = \bar{n}$, entonces

$$\bar{x} = \bar{n} - \bar{m}$$

por tanto:

$$\bar{x} = (4,-6, 2).$$

Obsérvese que $\bar{m} - \bar{n}$ y $\bar{n} - \bar{m}$ tienen la misma magnitud, la misma dirección, pero sentidos opuestos.

DEFINICIÓN 2.13. *Sean el vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y el escalar $\lambda \in \Re$; se llama multiplicación de un vector por un escalar o simplemente multiplicación por un escalar a la operación:*

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

2.4.5 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

TEOREMA 2.3. *Sean los vectores* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$; *y sean los escalares* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$. *Entonces:*

i) $\lambda\bar{a}$ es un vector

ii) $(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{a} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{a}$

iii) $\lambda_1(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda_1\bar{a} + \lambda_1\bar{b}$

iv) $\lambda_1(\lambda_2\bar{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\bar{a}$

v) $1\bar{a} = \bar{a}$.

El conjunto de vectores junto con las propiedades enunciadas en los teoremas 2.2 y 2.3 forman una estructura llamada *espacio vectorial*, la cual se estudia en Álgebra Lineal.

Las demostraciones también son sencillas y se efectuará sólo la del inciso *iv*.

$$\begin{aligned}\lambda_1(\lambda_2\bar{a}) &= \lambda_1[\lambda_2(a_1, a_2, a_3)] = \\ &= \lambda_1(\lambda_2 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_2 a_3) = \\ &= [\lambda_1(\lambda_2 a_1), \lambda_1(\lambda_2 a_2), \lambda_1(\lambda_2 a_3)] = \\ &= [(\lambda_1\lambda_2)a_1, (\lambda_1\lambda_2)a_2, (\lambda_1\lambda_2)a_3] = \\ &= (\lambda_1\lambda_2)\bar{a}\end{aligned}$$

Q.E.D.

Otras propiedades interesantes de esta operación se presentan en los teoremas que se enuncian a continuación.

TEOREMA 2.4. *Sean el vector* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y el escalar* λ; *entonces:*

i) $0\,\bar{a} = \bar{o}$;

ii) $\lambda\, \bar{o} = \bar{o}$

Las demostraciones son obvias.

TEOREMA 2.5. *Sean el vector* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y el escalar* λ; *entonces,* $\lambda\, \bar{a}$:

i) tiene módulo $|\lambda|\,|\bar{a}|$;

ii) si $\lambda > 0$, *el vector* $\lambda\bar{a}$ *tiene la misma dirección y el mismo sentido que* $\bar{a}$;

iii) si $\lambda < 0$, *el vector* $\lambda\bar{a}$ *tiene la misma dirección y sentido opuesto que* $\bar{a}$.

En conclusión, el resultado de multiplicar un escalar no nulo por un vector diferente del vector cero, es un vector con la misma dirección que la del original, con magnitud igual a la del vector original multiplicada por el valor absoluto del escalar y con sentido igual al del original si el escalar es positivo, o contrario si es negativo.

En efecto:

i)

$$
\begin{aligned}
|\lambda\bar{a}| &= |(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)| = \\
&= \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2 + (\lambda a_3)^2} = \\
&= \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \lambda^2 a_3^2} = \\
&= \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = \\
&= \sqrt{\lambda^2}\,\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \\
&= \pm\lambda\, |\bar{a}| =
\end{aligned}
$$

Pero como el módulo de un vector debe siempre ser no negativo:

$$|\lambda\bar{a}| = |\lambda|\,|\bar{a}|$$

Q.E.D.

ii) La dirección y el sentido de $\bar{a}$ están dados por:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}$$

Por otra parte, el primer coseno director de $\lambda\bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ es:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\lambda a_1}{|\lambda\bar{a}|}$$

Por la conclusión del inciso *i)*:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\lambda a_1}{|\lambda||\bar{a}|}$$

pero $\lambda > 0$, entonces:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\lambda a_1}{\lambda|\bar{a}|} =$$

$$= \frac{a_1}{|\bar{a}|}$$

que es igual al primer coseno director de $\bar{a}$; los otros cosenos directores son respectivamente iguales a los de $\bar{a}$, como se puede demostrar siguiendo un procedimiento análogo.

iii) La demostración se deja al lector como ejercicio.

COROLARIO 2.2. *Sea el vector no nulo* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$; *un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que* $\bar{a}$ *es:*

$$\bar{u} = \frac{1}{|\bar{a}|}(a_1, a_2, a_3)$$

2.4.6 REPRESENTACIÓN TRINÓMICA DE UN VECTOR

Los vectores se representan analíticamente por medio de ternas ordenadas de números reales; sin embargo, también suelen representarse con la llamada *representación trinómica*, la cual consiste en la utilización de los vectores unitarios i, j y k; y las operaciones de adición de vectores y multiplicación por un escalar, de acuerdo con el siguiente teorema.

TEOREMA 2.6. *Sea el vector* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$; *entonces* $\bar{a} = a_1\,i + a_2\,j + a_3\,k$.

En efecto:

$$a_1\,i + a_2\,j + a_3\,k = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) =$$

$$= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) =$$

$$= (a_1, a_2, a_3) = \bar{a}$$

Q.E.D.

EJERCICIO 2.9. Sean los vectores $\bar{u} = (2,-3, 5)$, $\bar{v}\ (1, 2,-3)$; obtener las componentes del vector $\bar{w}$, de tal manera que $\bar{u} + 3\bar{v} + \bar{w} = \bar{o}$.

SOLUCIÓN:

$$\bar{w} = \bar{o} - \bar{u} - 3\bar{v} =$$

$$= (0, 0, 0) - (2,-3,-5) - 3(1, 2,-3) =$$

$$= (-2, 3, 5) - (3, 6,-9) =$$

$$= (-5,-3, 14).$$

EJERCICIO 2.10. Obtener un vector $\bar{\tau}$ que tenga la misma dirección que $\bar{s} = -2\ i + j + 2\ k$, pero con módulo igual a nueve unidades y con sentido opuesto al de $\bar{s}$.

SOLUCIÓN:

Primero vale la pena encontrar un vector unitario con la dirección requerida:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} (-2\ i + j + 2\ k) =$$

$$= \frac{1}{3}(-2\ i + j + 2\ k) =$$

$$= \frac{-2}{3}\ i + \frac{1}{3}\ j + \frac{2}{3}\ k$$

Ahora, si este vector se multiplica por el escalar -9 se modificará en un vector con la magnitud nueve y con sentido inverso, ya que el escalar es negativo:

$$\bar{s} = -9\mu = -9\left(\frac{-2}{3}\ i + \frac{1}{3}\ j + \frac{2}{3}\ k\right) =$$

$$= 6\ i - 3\ j - 6\ k.$$

2.4.7 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Existen dos maneras diferentes de multiplicar vectores. En la primera de ellas el resultado es un escalar, por lo que se le llama *producto escalar*; mientras que en la segunda, el resultado es un vector y se conoce como *producto vectorial.*

2.4.8 PRODUCTO ESCALAR

DEFINICIÓN 2.14. *Sean los vectores* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$. *Se llama producto escalar, producto interno o producto punto de* $\bar{a}$ *y* $\bar{b}$ *a* $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

El nombre de *producto escalar* resulta del hecho de que el resultado de multiplicar dos vectores de esta manera es un escalar. Por otra parte, se le llama *producto interno* porque con este nombre se conoce en Álgebra Lineal a una operación que cumple con ciertas características y como esta multiplicación de vectores las cumple, sí se trata de un producto interno. Finalmente, por la notación empleada se le nombra *producto punto.*

Es frecuente que los alumnos pregunten cuál es el significado geométrico de esta operación y, directamente, no existe. Tiene muchas aplicaciones no sólo en la Geometría, pero no una interpretación directa.

2.4.9 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

TEOREMA 2.7. *Sean los vectores* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$; $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$; *y el escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

i) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

ii) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;

iii) $\lambda\bar{a} \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$;

iv) $\bar{a} \cdot \bar{a} > 0$; *si* $\bar{a} \neq \bar{0}$.

Las propiedades enunciadas en el teorema 2.7 son las que hacen que el producto escalar sea un producto interno, de acuerdo con el Álgebra Lineal.

La demostración de las propiedades es inmediata utilizando la definición del producto escalar. A manera de ejemplo se demostrará la propiedad *iv*:

En efecto:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

pero si $\bar{a} \neq \bar{0}$, entonces:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$$

Q.E.D.

De esta propiedad se desprende el siguiente corolario.

COROLARIO 2.3. *Sea el vector* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, *entonces* $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$.

En efecto:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \cdots \quad (1)$$

por otra parte,

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}$$

elevando al cuadrado:

$$|\bar{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \cdots \quad (2)$$

como los segundos miembros de las expresiones (1) y (2) son iguales, se concluye:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$$

Q.E.D.

EJERCICIO 2.11. Sean los vectores $\bar{s} = (4, -2, 0)$, $\bar{t} = -3i + 5j - k$. Calcular $\bar{s} \cdot \bar{t}$.

SOLUCIÓN:

$$\bar{s} \cdot \bar{t} = (4)(-3) + (-2)(5) + (0)(-1) =$$

$$= -12 -10 + 0 = -22.$$

EJERCICIO 2.12. Sea el vector $\bar{N} = (1, 2, 3)$. Determinar el conjunto de vectores $\bar{B}$, que cumplan con $\bar{N} \cdot \bar{B} = 0$.

SOLUCIÓN:

Si

$$\bar{B} = b_1\, i + b_2\, j + b_3\, k$$

entonces:

$$\bar{N} \cdot \bar{B} = (1)(b_1) + (2)(b_2) + (3)(b_3) = 0$$

por lo que:

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 0$$

si

$$b_2 = x, \quad b_3 = y;$$

$$b_1 = -(2x + 3y)$$

finalmente:

$$\{\bar{B} \mid \bar{B} = (-2x - 3y, x, y) \text{ con } x, y \in \Re.\}$$

TEOREMA 2.8. *Sean los vectores* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$; *entonces* $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta$, *donde* θ *es el ángulo que forman dos segmentos dirigidos, con sus orígenes concurrentes que representan a los vectores.*

En efecto:

Si $\bar{a} \neq \lambda\bar{b}$, $\lambda \in \Re$, $\lambda \neq 0$. Supóngase que los vectores están representados geométricamente por los segmentos dirigidos de la figura 2.8, los cuales están alojados en dos lados contiguos de un triángulo:

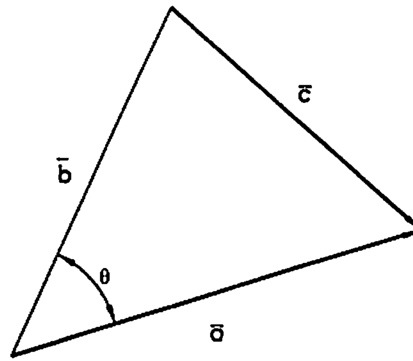


FIGURA 2.8

por la ley de los cosenos:

$$|\bar{c}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta$$

$$2|\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - |\bar{c}|^2$$

pero, de la figura 2.8:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$$

entonces:

$$2|\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - |\bar{a} - \bar{b}|^2$$

$$2|\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta = \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{b}\cdot\bar{b} - (\bar{a} - \bar{b})\cdot(\bar{a} - \bar{b})$$

por distributividad:

$$2|\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta = \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{b}\cdot\bar{b} - \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{a} - \bar{b}\cdot\bar{b}$$

cancelando y tomando en cuenta la conmutatividad:

$$2|\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta = 2(\bar{a}\cdot\bar{b})$$

finalmente:

$$|\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta = \bar{a}\cdot\bar{b}$$

Si $\bar{a} = \lambda\bar{b}, \quad \lambda \in \Re, \quad \lambda \neq 0;$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \lambda\bar{b} \cdot \bar{b}$$

pero:

$$\lambda\bar{b} \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{b} \cdot \bar{b}) =$$

$$= \lambda(|\bar{b}||\bar{b}|)$$

Por otra parte, se requiere demostrar que:

$$\lambda\bar{b} \cdot \bar{b} = |\lambda\bar{b}||\bar{b}|\cos\theta =$$

$$= |\lambda||\bar{b}||\bar{b}|\cos\theta$$

entonces, la igualdad:

$$\lambda|\bar{b}||\bar{b}| = |\lambda||\bar{b}||\bar{b}|\cos\theta$$

se cumple para

$$\lambda > 0 \text{ si } \theta = 0°$$

$$\text{y para } \lambda < 0 \text{ si } \theta = 180°.$$

Q.E.D.

El teorema anterior permite calcular el producto escalar de dos vectores de otra manera diferente a la definición; sin embargo, no es en ese hecho que radica su importancia. En primer lugar, dicho teorema ofrece la posibilidad de calcular el ángulo que forman dos vectores; por otra parte, proporciona las bases para determinar las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos vectores.

2.4.10 ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

De la afirmación del teorema 2.8, se tiene que:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$

entonces:

$$\cos \theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$$

o bien:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$$

Es evidente que las dos expresiones anteriores sólo son válidas si ambos vectores son diferentes del vector cero y, geométricamente, esto es lógico pues el vector nulo no tiene definida una dirección y no podría hablarse del ángulo que forma éste con cualquier otro vector. Más adelante, se retomarán estas ideas.

Obsérvese que el producto punto de dos vectores no nulos al ser un escalar, puede ser positivo, negativo o nulo. Por la tesis del teorema 2.8 puede deducirse que si el producto escalar es positivo, el coseno del ángulo que forman los vectores también es positivo, entonces dicho ángulo es agudo:

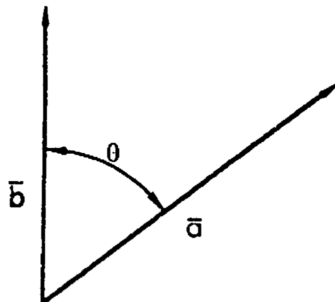


FIGURA 2.9

Por otra parte, si el producto interno es negativo, el coseno también es negativo y, por lo tanto, el ángulo que forman los vectores es obtuso:

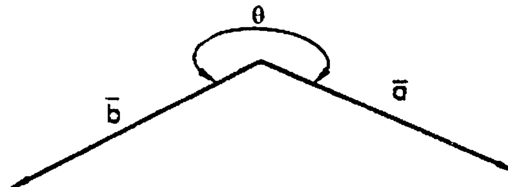


FIGURA 2.10

Finalmente, si el producto escalar es nulo, el coseno también y el ángulo que forman es recto:

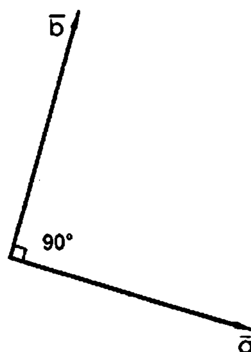


FIGURA 2.11

De esta última conclusión se tiene la condición de perpendicularidad entre dos vectores.

2.4.11 CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD DE DOS VECTORES

TEOREMA 2.9. *Dos vectores* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *son perpendiculares si y sólo si* $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Obsérvese que en el teorema 2.9 no se excluye la posibilidad de que alguno o ambos vectores factores sea el vector nulo, lo que ocurre es que se aceptará que el vector cero es perpendicular a todos los vectores.

En los cursos de Geometría Analítica suelen utilizarse como sinónimos los términos *perpendicular* y *ortogonal*, y en estas notas también lo haremos, aunque en rigor no sean sinónimos. El estudiante de Álgebra Lineal aprenderá que para otros productos internos debemos distinguir estos dos conceptos, pero como sólo se empleará el producto escalar, pueden considerarse sinónimos.

2.4.12 UNA CONDICIÓN DE PARALELISMO DE DOS VECTORES NO NULOS

TEOREMA 2.10. *Dos vectores no nulos* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *son paralelos si* $\bar{a} = \lambda\bar{b}$; $\lambda \in \Re$, $\lambda \neq 0$.

La demostración se apoya en la del teorema 2.9 y se deja al lector.

Cuando se trabaje con el producto vectorial se enunciará otra condición de paralelismo entre dos vectores; sin embargo, para fines prácticos, la ya enunciada es más sencilla en su aplicación.

EJERCICIO 2.13. Calcular el ángulo que forman los vectores

$$\bar{u} = -i - j + 4k \text{ y } \bar{v} = (2,-3,-1).$$

SOLUCIÓN:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} =$$

$$= \text{ang cos } \frac{(-1)(2) + (-1)(-3) + (4)(-1)}{\sqrt{1 + 1 + 16}\sqrt{4 + 9 + 1}} =$$

$$= \text{ang cos } \frac{-2 + 3 - 4}{\sqrt{18}\sqrt{14}} =$$

$$= \text{ang cos } \frac{-3}{\sqrt{252}} =$$

$$\approx 100.89°$$

EJERCICIO 2.14. Obtener la representación analítica de un vector que sea perpendicular a $\bar{u}$ (3, −1, 3); que sea paralelo al plano XY y que tenga módulo igual a 10 unidades.

SOLUCIÓN:
Un vector $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, perpendicular a $\bar{u}$, debe cumplir con:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (3,-1, 3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0$$

entonces:

$$3v_1 - v_2 + 3v_3 = 0$$

pero cualquier vector paralelo al plano XY tiene la característica:

$$\bar{v} = (v_1, v_2, 0)$$

tomando en cuenta esto:

$$3v_1 - v_2 = 0$$

$$\therefore \ v_2 = 3v_1$$

entonces:

$$\bar{v} = (v_1, 3v_1, 0)$$

como el vector debe, además, tener magnitud de diez unidades:

$$\sqrt{v_1^2 + 9v_1^2} = 10$$

$$\sqrt{10v_1^2} = 10$$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$$10v_1^2 = 100$$

$$v_1^2 = 10$$

$$v_1 = \pm\sqrt{10}$$

finalmente, un vector con las características deseadas es:

$$\bar{v} = -\sqrt{10}\ i - 3\sqrt{10}\ j.$$

EJERCICIO 2.15. Obtener un vector que sea perpendicular al triángulo que tiene como vértices a los puntos $A(3,-2,-1)$; $B(1, 2,-2)$; $C(4,-5,-5)$.

SOLUCIÓN:

Si se determinan dos segmentos dirigidos alojados en dos lados del triángulo y se obtiene un vector que sea perpendicular a ambos lados, también lo será al otro lado pues un triángulo siempre está en un plano; de manera que:

$$\overline{AB} = (1 - 3, 2 + 2, -2 + 1) = (-2, 4, -1)$$

$$\overline{AC} = (4 - 3, -5 + 2, -5 + 1) = (1, -3, -4)$$

Sea el vector $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$, para que sea perpendicular a $\overline{AB}$ debe cumplirse:

$$\overline{AB} \cdot \bar{p} = 0;$$

entonces:

$$(-2, 4, -1) \cdot (p_1, p_2, p_3) = -2p_1 + 4p_2 - p_3 = 0 \qquad \ldots (1)$$

análogamente, para que sea perpendicular también a $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} \cdot \bar{p} = 0;$$

$$(1, -3, -4) \cdot (p_1, p_2, p_3) = p_1 - 3p_2 - 4p_3 = 0 \qquad \ldots (2)$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por 2 y sumándola a la ecuación (1):

$$-2p_2 - 9p_3 = 0 \qquad \ldots (3)$$

como se tiene una ecuación con dos variables, existe una infinidad de soluciones; si $p_2 = 18$, sustituyendo en (3):

$$p_3 = -4;$$

llevando estos valores a (1):

$$p_1 = 38;$$

de manera que un vector perpendicular al triángulo es:

$$\bar{p} = 38\, i + 18\, j - 4\, k.$$

Este ejercicio puede resolverse de una manera más práctica, una vez que se enuncie el producto vectorial de dos vectores. Se recomienda al lector repase el ejercicio 2.19 en ese momento y vea su solución.

2.4.13 COMPONENTE VECTORIAL DE UN VECTOR EN LA DIRECCIÓN DE OTRO Y COMPONENTE ESCALAR DE UN VECTOR EN LA DIRECCIÓN DE OTRO

DEFINICIÓN 2.15. *Se llama componente vectorial de un vector $\bar{a}$ en la dirección del vector $\bar{b}$ a la proyección perpendicular de $\bar{a}$ sobre la dirección de $\bar{b}$.*

Puede imaginarse esta componente como la "sombra" del vector $\bar{a}$ sobre la dirección de $\bar{b}$. La notación que se utilizará es *comp vect*$_{\bar{b}}\, \bar{a}$, aunque otros autores usan *comp vect* $\bar{a}_{\bar{b}}$.

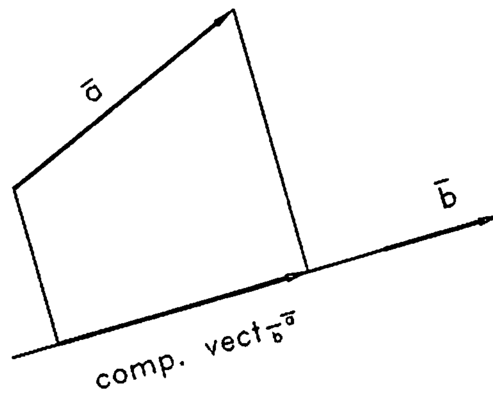


FIGURA 2.12

A la componente vectorial suele llamársele también *proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$*. Entonces, su notación es $proy_{\bar{b}}\ \bar{a}$.

Reflexionando un poco puede deducirse que la *comp vect*$_{\bar{b}}\ \bar{a}$ al ser un vector tiene magnitud, dirección y sentido. Su dirección es la misma que la del vector $\bar{b}$, su sentido sólo puede ser el del vector $\bar{b}$ o el contrario, y su magnitud se obtiene a continuación:

Sean los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, mostrados en la figura 2.13:

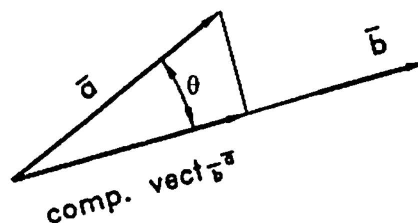


FIGURA 2.13

del triángulo rectángulo que tiene por lados concurrentes $\bar{a}$ y *comp vect*$_{\bar{b}}\ \bar{a}$

$$|comp\ vect_{\bar{b}}\ \bar{a}| = |\bar{a}|\ |\cos\theta| \qquad \ldots (1)$$

La expresión (1) permite calcular el módulo de *comp vect*$_{\bar{b}}\ \bar{a}$ pero no resulta práctica. Si se multiplica y divide el segundo miembro de (1) por $|\bar{b}|$, lo cual siempre es posible hacer, dado que $|\bar{b}| \neq 0$, puesto que no puede ser el vector nulo porque tiene que definir una dirección en la cual se va a proyectar $\bar{a}$;

$$|comp\ vect_{\bar{b}}\ \bar{a}| = \frac{|\bar{a}|\ |\bar{b}|\ |\cos\theta|}{|\bar{b}|}$$

pero $|\bar{a}|\ |\bar{b}|\cos\theta = \bar{a}\cdot\bar{b}$.

Además, como se explicó, el $\cos\theta$ puede ser positivo, negativo o nulo y el módulo de un vector no puede ser negativo, de manera que la magnitud de la componente vectorial estará dada por:

$$|comp\ vect_{\bar{b}}\ \bar{a}| = \frac{|\bar{a}\cdot\bar{b}|}{|\bar{b}|}$$

En las aplicaciones, el signo del producto escalar $\bar{a}\cdot\bar{b}$ es importante, pues expresa:

i) si $\cos\theta > 0$, el ángulo θ que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es agudo y, por lo tanto, la proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$ tiene el mismo sentido que el vector que recibe la proyección; es decir $\bar{b}$;

ii) si $\cos\theta = 0$, el ángulo θ es de $90°$ y la proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$ es el vector nulo;

iii) si $\cos\theta < 0$, θ es obtuso y $comp\ vect_{\bar{b}}\ \bar{a}$ tiene sentido contrario al de $\bar{b}$.

Con base en estas consideraciones, la expresión que permite obtener la proyección deseada con módulo, dirección y sentido es:

$$comp\ vect_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}\ \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

puesto que al multiplicar el escalar que señala el módulo y el sentido de la proyección por un vector unitario en la dirección y sentido de $\bar{b}$, se obtiene el vector requerido.

Al escalar citado, se le conoce como la *componente escalar de* $\bar{a}$ *en la dirección de* $\bar{b}$ y se representa por:

$$comp\ esc_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Como se mencionó la $comp\ esc_{\bar{b}}\ \bar{a}$ es positiva si la proyección de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$ y el vector $\bar{b}$, que recibe la proyección, tienen el mismo sentido; es nula si son ortogonales y es negativa si son de sentidos opuestos.

EJERCICIO 2.16. Sean los vectores $\bar{a} = 3i - 6j + 9k$; y $\bar{b} = (-1, 1, -1)$. Determinar:

a) *comp* $esc_{\bar{b}}\ \bar{a}$;

b) *comp* $esc_{\bar{a}}\ \bar{b}$;

c) *comp* $vect_{\bar{b}}\ \bar{a}$;

d) *comp* $vect_{\bar{a}}\ \bar{b}$;

SOLUCIÓN:

a) $comp\ esc_{\bar{b}}\ \bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} =$

$$= \frac{(3,-6,\ 9) \cdot (-1,\ 1,-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{-3 - 6 - 9}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{18}{\sqrt{3}}$$

b) $comp\ esc_{\bar{a}}\ \bar{b} = \dfrac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} =$

$$= \frac{-18}{\sqrt{9 + 36 + 81}} =$$

$$= -\frac{18}{\sqrt{126}} = -\frac{6}{\sqrt{14}}$$

c) $comp\ vect_{\bar{b}}\ \bar{a} = comp\ esc_{\bar{b}}\ \bar{a}\ \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|} =$

$$= -\frac{18}{\sqrt{3}}\ \frac{(-1,\ 1,-1)}{\sqrt{3}} =$$

$$= (6,-6,\ 6)$$

d) $comp\ vect_{\bar{a}}\ \bar{b} = comp\ esc_{\bar{a}}\ \bar{b}\ \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} =$

$$= -\frac{6}{\sqrt{14}}\ \frac{(3,-6,\ 9)}{\sqrt{126}} = -\frac{3}{7}\ (1,\ -2,\ 3)$$

EJERCICIO 2.17. Sean los vectores representados en la figura 2.14, alojados en el plano YZ. Determinar:

a) *comp* $esc_{\bar{u}}\ \bar{v}$;

b) *comp* $vect_{\bar{u}}\ \bar{v}$;

c) las coordenadas del punto B.

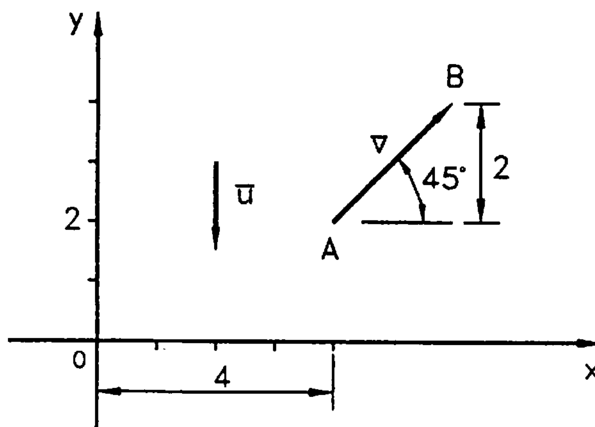


FIGURA 2.14

SOLUCIÓN:

a) En este caso no es necesario efectuar ningún cálculo, pues por observación:

$$comp\ esc_{\bar{u}}\ \bar{v} = -2$$

El signo negativo se debe a que el sentido de la proyección de $\bar{v}$ en la dirección de $\bar{u}$, que es la misma que la del eje Z, es opuesto al sentido de $\bar{u}$.

b) También aquí no es necesario realizar cálculo alguno:

$$comp\ vect_{\bar{u}}\ \bar{v} = (0,\ 0,\ 2)$$

c) Para obtener las coordenadas de B solamente será necesario determinar las componentes escalares de $\bar{v}$, pues de acuerdo con la figura 2.15 se tiene: $\bar{b} = \bar{a} + \bar{v}$;

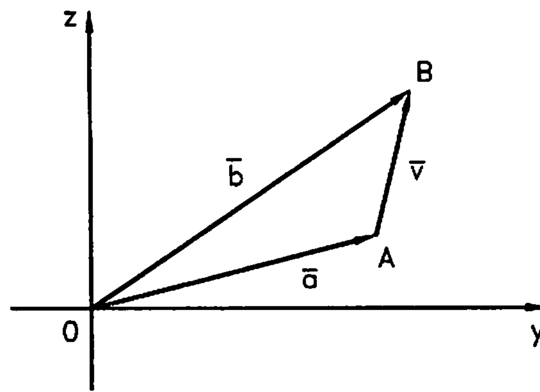


FIGURA 2.15

en donde $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son los vectores de posición de A y B, respectivamente. Entonces:

$$\bar{a} = (0, 4, 2);$$

$$\bar{v} = (0, 2, 2);$$

pues la componente en Y es igual a la componente en Z, ya que el ángulo que forma el vector con el eje Y es de $45°$. Por lo tanto:

$$\bar{b} = (0, 4, 2) + (0, 2, 2) = (0, 6, 4).$$

Finalmente, las coordenadas cartesianas de B son:

$$B(0, 6, 4).$$

2.4.14 PRODUCTO VECTORIAL

DEFINICIÓN 2.16. *Sean los vectores* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$; *se llama producto vectorial o producto cruz a* $\bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$.

Como se mencionó, el nombre de *producto vectorial* proviene de que el resultado de multiplicar dos vectores de esta manera es un vector y se llama *producto cruz* porque la notación empleada es con una cruz. Es muy importante que se use la notación correcta, ya sea para el producto escalar o para el vectorial, pues como son dos operaciones diferentes podría prestarse a confusiones. Algunos autores, sobre todo europeos, suelen representar al producto vectorial con la notación

$$\bar{a} \wedge \bar{b}.$$

La definición anterior puede ser difícil de recordar, por lo que de manera práctica se sugiere usar una forma mnemotécnica, la cual consiste en un "pseudodeterminante":

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

El lector que conozca el cálculo de un determinante de orden tres puede emplear este arreglo para una operación práctica.

2.4.15 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO VECTORIAL

TEOREMA 2.11. *Sean los vectores* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *y* $\bar{c}$; *y el escalar* $\lambda \in \Re$; *entonces:*

i) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$; *a esta propiedad se le conoce como anticonmutatividad.*

ii) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$; *distributividad por la izquierda;*

iii) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$; *distributividad por la derecha;*

iv) $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$

v) $\bar{o} \times \bar{a} = \bar{a} \times \bar{o} = \bar{o}$.

2.4.16 PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PRODUCTO VECTORIAL

TEOREMA 2.12. *Sean los vectores no nulos* $\bar{a}$ *y* $\bar{b}$; *entonces:*

i) $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|$ *sen* θ; *donde* θ *es el ángulo que forman los vectores factores;*

ii) $\bar{a} \times \bar{b}$ *es un vector ortogonal tanto a* $\bar{a}$ *como a* $\bar{b}$;

iii) el sentido de $\bar{a} \times \bar{b}$ *es el que se sigue con la regla de la mano derecha; es decir, si el dedo medio de la mano derecha apunta al prefactor, el dedo pulgar al posfactor, entonces el dedo índice apuntará al producto, veáse figura 2.16.*

iv) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{o} \Leftrightarrow \bar{a}$ *y* $\bar{b}$ *son paralelos.*

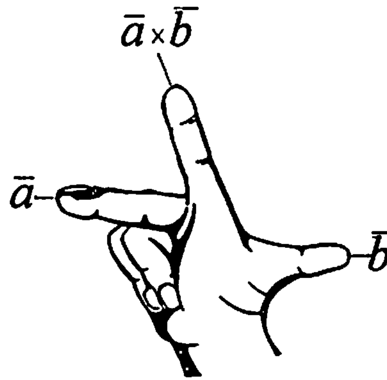


FIGURA 2.16

Casi todas las demostraciones de estas propiedades se efectúan usando exclusivamente la definición de producto vectorial, por ello no se considera útil realizarlas aquí; únicamente se hará la del inciso *i* del teorema 2.12 por tener aspectos interesantes.

i) En efecto:

Sean los vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Se tiene que

$$|\bar{a}|\ |\bar{b}|\ sen\ \theta = |\bar{a}|\ |\bar{b}|\ \sqrt{1 - \cos^2\theta} =$$

pero

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|}$$

entonces:

$$|\bar{a}|\ |\bar{b}|\ sen\ \theta = |\bar{a}|\ |\bar{b}|\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2} =$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}$$

desarrollando y simplificando:

$$|\bar{a}||\bar{b}| \text{ sen } \theta = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} =$$

$$= |\bar{a} \times \bar{b}|$$

Q.E.D.

De las propiedades enunciadas se desprenden observaciones muy importantes:

— La multiplicación de dos vectores en forma vectorial es cerrada.

— Esta operación no es conmutativa, de manera que resulta imprescindible especificar cuál es el prefactor y cuál el posfactor.

— El producto vectorial de dos vectores es perpendicular al plano en el que pueden alojarse los dos factores.

— El producto vectorial de dos vectores no nulos puede ser el vector cero; por lo que la propiedad *iv* del teorema 2.12 constituye la otra condición de paralelismo anunciada.

De la propiedad *i* del teorema 2.12 se tiene una aplicación del producto vectorial a la geometría.

2.4.17 APLICACIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL EN EL CÁLCULO DEL ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

TEOREMA 2.13. *Sea el paralelogramo de la figura 2.17:*

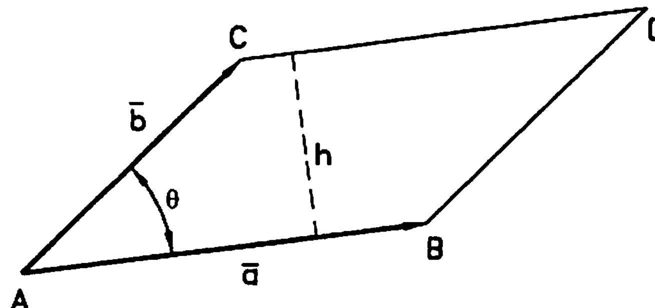


FIGURA 2.17

el área del paralelogramo está dada por:

$$Área = |\bar{a} \times \bar{b}|;$$

donde $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son dos vectores que se alojan en dos en dos lados no paralelos del paralelogramo.

En efecto:

De la Geometría Elemental se sabe que el área de un paralelogramo se obtiene de multiplicar las longitudes de la base y de la altura, entonces de la figura 2.17:

$$Área = |\bar{a}| \; h;$$

pero, de la misma figura se tiene que

$$h = |\bar{b}| \; sen \; \theta;$$

por lo que:

$$Área = |\bar{a}| \; |\bar{b}| \; sen \; \theta =$$

$$= |\bar{a} \times \bar{b}|$$

Q.E.D.

EJERCICIO 2.18. Sean los vectores $\bar{u} = 4\,i - 2\,j + 5\,k$; $\bar{v} = (-1,-2,7)$; determinar:

a) $\bar{u} \times \bar{v}$;

b) $\bar{v} \times \bar{u}$.

SOLUCIÓN:

a) $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} =$

$$= i\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-14 + 10)i - (28 + 5)j + (-8 - 2)k =$$

$$= -4\ i - 33\ j - 10\ k.$$

b) $\bar{v} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= (-10 + 14)i - (-5 - 28)j + (2 + 8)k =$$

$$= 4\ i + 33\ j + 10\ k.$$

EJERCICIO 2.19. Determinar un vector que sea perpendicular al plano que contiene al triángulo de vértices $A(3,-2,-1)$; $B(1, 2,-2)$ *y* $C(4,-5,-5)$.

SOLUCIÓN:

Este problema fue resuelto en el ejercicio 2.15, pero ahora se hará usando el producto vectorial y, como se verá, el tratamiento es más sencillo. El vector ortogonal a dicho plano se obtiene con el producto vectorial de dos vectores alojados en dos lados del triángulo. En el ejercicio 2.15 se obtuvo la expresión analítica de dichos vectores, entonces:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-19,-9, 2)$$

Como puede observarse, los resultados son diferentes en el ejercicio 2.15 y en éste; sin embargo, ambos vectores son paralelos. Nótese que sus números directores son proporcionales y en el enunciado se mencionaba un vector perpendicular lo que significa que no es único; y en este caso hay una infinidad.

EJERCICIO 2.20. Calcular el área del pentágono irregular que tiene por vértices los puntos:

$A(1, 4, 1)$; $B(0, 4, 3)$; $C(2, 4, 7)$; $D(4, 4, 5)$ *y* $E(3, 4, 1)$.

SOLUCIÓN:

Al observar las coordenadas de los vértices, todos estos puntos tienen la misma ordenada, lo que significa que el pentágono está alojado en un plano paralelo al plano XZ, véase figura 2.18:

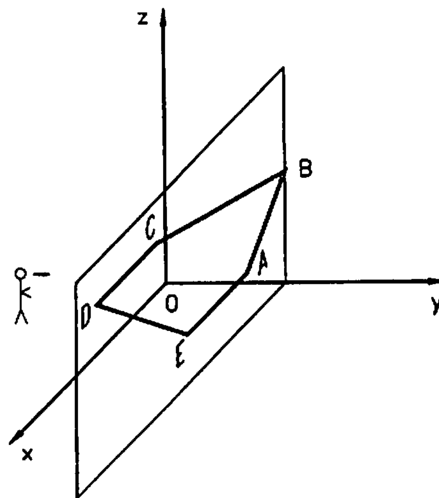


FIGURA 2.18

Si el pentágono se observa de frente, como se indica por el individuo que aparece en la figura 2.18, lo que se miraría sería el pentágono de la figura 2.19:

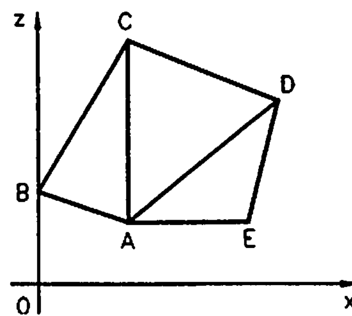


FIGURA 2.19

entonces, el área del pentágono es igual a la suma de las áreas de los triángulos ***ABC, ACD y ADE.*** Ahora bien, para calcular dichas áreas, puede tomarse en cuenta que el área de un triángulo es igual a la mitad del área de un paralelogramo, como se puede apreciar en la figura 2.20:

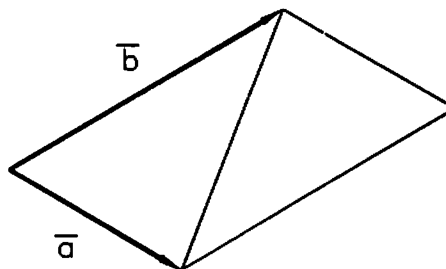


FIGURA 2.20

Entonces, el área del pentágono es:

$$Área = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| + \frac{1}{2}|\overline{AC} \times \overline{AD}| + \frac{1}{2}|\overline{AD} \times \overline{AE}|$$

por lo que es necesario obtener las componentes escalares de los segmentos dirigidos requeridos:

$$\overline{AB} = (0 - 1, 4 - 4, 3 - 1) = (-1, 0, 2);$$

$$\overline{AC} = (1, 0, 6);$$

$$\overline{AD} = (3, 0, 4);$$

$$\overline{AE} = (2, 0, 0).$$

Por otra parte, los productos vectoriales son:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (0, 8, 0);$$

$$\overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (0, 14, 0);$$

$$\overline{AD} \times \overline{AE} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 8, 0).$$

finalmente:

$$Área = \frac{1}{2}(8) + \frac{1}{2}(14) + \frac{1}{2}(8) = 15 \text{ unidades de área.}$$

2.4.18 PRODUCTO MIXTO O TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

DEFINICIÓN 2.17. *Sean los vectores* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *y* $\bar{c}$; *se llama producto mixto, o producto triple escalar, a* $[\bar{a} \;\; \bar{b} \;\; \bar{c}] = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Obsérvese que:

— El resultado de la operación es un escalar.

— No se han incluido paréntesis para indicar cuál operación debe efectuarse en primer lugar, ya que es obvio que debe determinarse primero el producto vectorial pues el producto escalar es, lógicamente, un escalar que no podría multiplicarse en forma vectorial por un vector.

— En la notación $[\bar{a} \;\; \bar{b} \;\; \bar{c}]$ no se escriben los operadores porque carece esto de importancia, de acuerdo con la tesis del siguiente teorema.

TEOREMA 2.14. *Sean los vectores* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *y* $\bar{c}$; *entonces:*

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}.$$

El teorema puede demostrarse efectuando las operaciones del miembro izquierdo, después las del miembro derecho, y comparando los resultados.

TEOREMA 2.15. *Sean los vectores* $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *y* $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$; *entonces:*

$$[\bar{a} \;\; \bar{b} \;\; \bar{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

En efecto:

$$[\bar{a} \;\; \bar{b} \;\; \bar{c}] = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} =$$

$$= (a_1, a_2, a_3) \cdot [(b_2c_3 - b_3c_2), -(b_1c_3 - b_3c_1), (b_1c_2 - b_2c_1)] =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Q.E.D.

2.4.19 ALGUNAS PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO MIXTO

TEOREMA 2.16. *Sean los vectores* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *y* $\bar{c}$; *entonces:*

i) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = -[\bar{a}\ \bar{c}\ \bar{b}]$

ii) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = [\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}] = [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}]$

iii) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$, *si alguno de los tres vectores es el vector nulo.*

La demostración de este teorema es evidente si se aplica la propiedad de los determinantes, la cual señala que el valor de un determinante cambia de signo si se intercambian dos líneas paralelas de él, de manera que en el caso del inciso *i*, al intercambiar dos renglones, el signo se altera, mientras que en *ii*, al hacerse dos cambios de renglón, el valor del determinante no cambia ni en signo. Esta afirmación *ii*) puede enunciarse de la siguiente manera: si se idealizan tres vectores colocados en una circunferencia, figura 2.21, el producto mixto de estos vectores puede realizarse tomando como primer vector a cualquiera de ellos y continuar con los que están en la circunferencia en el sentido que siguen las manecillas de un reloj. A esto algunos autores le llaman *cambiar cíclicamente* a los vectores.

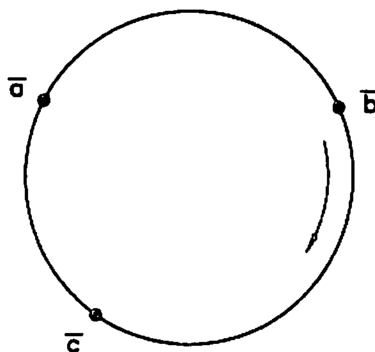


FIGURA 2.21

La conclusión *iii* también se deriva de que un determinante vale cero si una línea tiene únicamente ceros.

2.4.20 ALGUNAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PRODUCTO MIXTO

TEOREMA 2.17. *Sean los vectores no nulos* $\bar{a}$, $\bar{c}$ *y* $\bar{b}$; *entonces:*

i) $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ *si y sólo si los tres vectores pueden alojarse en un plano.*

ii) El valor absoluto de $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}]$ *es igual al volumen del paralelepípedo que tiene alojados en tres lados concurrentes a uno de sus vértices a los vectores* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *y* $\bar{c}$.

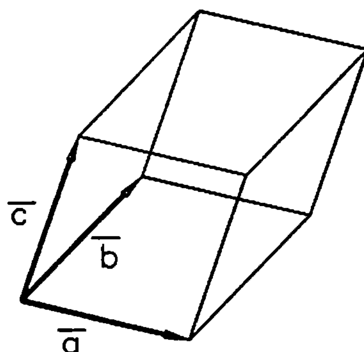


FIGURA 2.22

En efecto:

i) Si $\bar{a}$, $\bar{b}$ *y* $\bar{c}$ pueden alojarse en un mismo plano, $\bar{a} \times \bar{b}$ es perpendicular al plano que contiene a $\bar{c}$; por lo tanto, $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$. Por otra parte, si $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$ implica que $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{c}$, esto significa que el vector $\bar{c}$ puede alojarse en el plano que contiene a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$.

ii) $[\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}] = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} =$
$= |\bar{a} \times \bar{b}|\ |\bar{c}| \cos \psi$

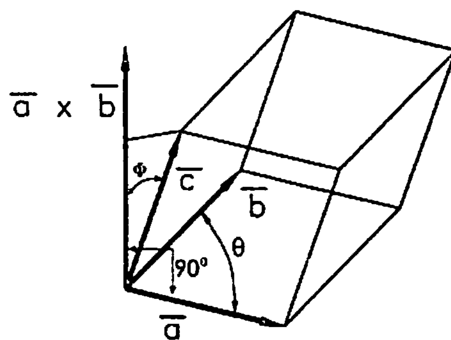


FIGURA 2.23

Pero por el teorema 2.13 se tiene que $|\bar{a} \times \bar{b}|$ es igual al área del paralelogramo que tiene por lados concurrentes a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$, que es la base del paralelepípedo de la figura 2.23. De esa misma figura se tiene que:

$$h = |\bar{c}| \cos \psi,$$

por lo que:

$$[\bar{a} \ \ \bar{b} \ \ \bar{c}] = |\bar{a} \times \bar{b}| \ h = V$$

Q.E.D.

EJERCICIO 2.21. Calcular $[\bar{u} \ \ \bar{v} \ \ \bar{w}]$ si:

$$\bar{u} = (-2, 3, 1), \ \ \bar{v} = j - 4\,k, \ \ \bar{w} = (3, 5, -6).$$

SOLUCIÓN:

$$[\bar{u} \ \ \bar{v} \ \ \bar{w}] = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(14) \ -3(12) \ + (-3) \ = \ -67.$$

El Álgebra Vectorial suele utilizarse para demostrar teoremas de la Geometría Elemental, lo que en ocasiones resulta más simple que usando los recursos propios de la Geometría. Se presenta como ejemplo el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 2.22. Demostrar que si el área de un triángulo rectángulo es igual a un cuarto del cuadrado de su hipotenusa, entonces el triángulo es isósceles.

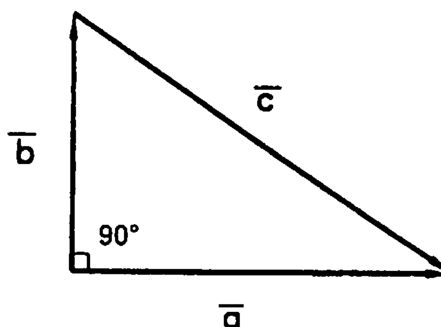


FIGURA 2.24

En efecto:

Sea el triángulo rectángulo de la figura 2.24, en el que se han alojado arbitrariamente tres vectores; esto significa que la asignación del sentido de los vectores no influye en la demostración.

Por hipótesis:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{4}|\bar{c}|^2$$

pero

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$$

igualando:

$$\frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}| = \frac{1}{4}|\bar{c}|^2$$

$$\frac{1}{2}|\bar{a}||\bar{b}| \ sen\ 90° = \frac{1}{4}|\bar{c}|^2$$

$$2|\bar{a}||\bar{b}| = |\bar{c}|^2 \qquad \text{... (1)}$$

Por otra parte, por ser un triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras:

$$|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 = |\bar{c}|^2 \qquad \text{... (2)}$$

igualando (1) y (2):

$$|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 = 2|\bar{a}||\bar{b}|$$

$$|\bar{a}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}| + |\bar{b}|^2 = 0$$

$$(|\bar{a}| - |\bar{b}|)^2 = 0$$

$$|\bar{a}| - |\bar{b}| = 0$$

$$|\bar{a}| = |\bar{b}|$$

por lo que el triángulo es isósceles. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1. Sea el segmento dirigido $\overline{AB} = (-2,-2,\ 5)$; si su punto extremo es $B(7,-5,\ 6)$, determinar las coordenadas de su punto origen A.

2.2. Sea el vector $\bar{u} = (-1,\ 4,\ 7)$, si se representa con un segmento dirigido que tiene su punto origen en $A(3,-3,-2)$, determinar las coordenadas de su punto extremo.

2.3. Determinar el valor del escalar $\lambda \in \Re$, de tal manera que $|\bar{a}| = \lambda |\bar{b}|$ si

$$\bar{a} = i - 8\,j + 32\,k; \quad \bar{b} = (-2,\ 6,-9).$$

2.4. Determinar las coordenadas del punto extremo del segmento dirigido con punto origen coincidente con el origen de coordenadas y que representa a un vector con ángulos directores obtusos e iguales, y con módulo igual a $\sqrt{27}$ unidades.

2.5. Sean los vectores $\bar{u} = i - 4\,k$; $\bar{v} = (2,-5,\ 0)$; $\bar{w} = (2,\ 9,\ 3)$. Obtener el vector $\bar{x}$, de tal manera que $\bar{u} - 2\bar{v} + \bar{x} = \bar{w}$.

2.6. Demostrar que para cualquier pareja de vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se cumple:

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|.$$

2.7. Comprobar que los puntos $A(3,\ 8,-5)$, $B(-1,\ 0,\ 5)$ y $C(-3,-4,\ 1)$ forman un triángulo rectángulo y determinar en cuál vértice se tiene el ángulo recto.

2.8. Sea el vector unitario $\bar{u} = \dfrac{2}{3}\,i + u_2\,j - \dfrac{1}{2}\,k$. Determinar un vector $\bar{v}$ de magnitud 36 unidades y que tenga la misma dirección que $\bar{u}$ (Hay dos soluciones).

2.9. Determinar *comp vect*$_{\bar{N}}\ \bar{a}$ si $\bar{a} = -3\,i + 2\,j - 2\,k$ y $\bar{N}$ es un vector perpendicular simultáneamente a $\bar{u} = (-8,\ 0,\ 1)$ y a $\bar{v} = 2\,j - k$.

2.10. Determinar *comp vect*$_{\bar{u}}\ \bar{a}$ y *comp vect*$_{\bar{v}}\ \bar{a}$, para los vectores del ejercicio 2.9.

2.11. Si *comp vect*$_{\bar{b}}\ \bar{a} = (-6,\ 6,\ -7)$ y $\bar{b} = (18,-18,\ 21)$ ¿cuánto vale *comp esc*$_{\bar{b}}\ \bar{a}$?

2.12. Si *comp esc*$_{\bar{b}}\ \bar{a} = -7$ y $\bar{b} = (2,\ 1,-2)$, ¿cuál es la *comp vect*$_{\bar{b}}\ \bar{a}$?

2.13. Sean los vectores $\bar{u} = 2\,i - j + 4\,k$ y $\bar{v} = 4\,i - 3\,j + 2\,k$, alojados en las diagonales de un paralelogramo; calcular el área del paralelogramo.

2.14. Sean los vectores $\bar{s}$ y $\bar{t}$, de tal manera que $\bar{s} \cdot \bar{t} = -4$ y $|\bar{s} \times \bar{t}| = 8$; calcular el ángulo que forman $\bar{s}$ y $\bar{t}$.

2.15. Sean los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$, de tal manera que $[\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}] = -4$; si:

$$\bar{u} = (0,-2,\ 0);\quad |\bar{v}| = 4;\quad |\bar{w}| = 2;\ \text{y}\ \bar{u}\ \text{forma}\ 30^\circ\ \text{con}\ \bar{v},$$

determinar el ángulo ϕ que forma $\bar{w}$ con un vector perpendicular tanto a $\bar{u}$ como a $\bar{v}$.

2.16. Demostrar que la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al doble del cuadrado de la mediana del tercer lado más la mitad del cuadrado del tercer lado (teorema de Apolonio).

2.17. Demostrar que $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\,\bar{c}$; para cualquier trío de vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ (doble producto vectorial).

2.18. Demostrar que, en general, para tres vectores no nulos $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \neq (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}.$$

CAPÍTULO 3

EL PUNTO, LA RECTA Y EL PLANO

3.1 INTRODUCCIÓN

Los dos primeros capítulos han tratado de herramientas que son útiles para el estudio de la Geometría Analítica; sin embargo, es en este tema en el que propiamente se inicia lo correspondiente a esta materia. Para comenzar, lo deseable sería establecer una definición de *punto*, sólo que éste es uno de los conceptos matemáticos que se aceptan sin definir y se comprenden de una manera intuitiva.

3.2 EL PUNTO

3.2.1 REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UN PUNTO

Un punto se representará analíticamente por sus coordenadas en cualquiera de los sistemas estudiados en el capítulo 1, Sistemas de referencia. En forma vectorial se representará a un punto por su vector de posición.

Recuérdese que existe una correspondencia biunívoca entre los vectores de posición y los puntos en el espacio y que las componentes escalares de un vector de posición coinciden numéricamente con las coordenadas del punto que representa el vector.

3.2.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre los puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ es igual al módulo del segmento dirigido $\overline{AB}$, que, como se puede observar en la figura 3.1, es igual a $|\overline{AB}| = |\bar{b} - \bar{a}|$.

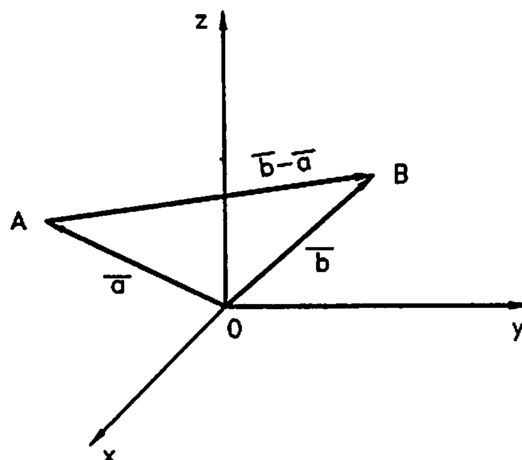


FIGURA 3.1

Si se calcula esta magnitud, se obtiene:

$$|\bar{b} - \bar{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

que es la expresión escalar para calcular la distancia entre dos puntos. Resulta obvio que:

$$|\bar{b} - \bar{a}| = |\bar{a} - \bar{b}|$$

por lo que carece de importancia la elección del punto origen y del punto extremo.

EJERCICIO 3.1. Calcular la distancia entre los puntos $A(-1, 4, 2)$ y $B(-1, 0, 6)$.

SOLUCIÓN:
Los vectores de posición de los puntos son:

$$\bar{a} = -i + 4j + 2k; \quad \bar{b} = -i + 6k.$$

Entonces, la distancia es:

$$d = \sqrt{(-1+1)^2 + (4-0)^2 + (2-6)^2} \quad =$$

$d = 4\sqrt{2}$ unidades de longitud.

EJERCICIO 3.2. Sea el punto $P(5, 7, -3)$. Determinar las coordenadas cartesianas de un punto R que se encuentre en la dirección del punto $Q(7, 6, -1)$ y que diste de P dos terceras partes de la distancia que existe entre P y Q.

SOLUCIÓN:
Para resolver este problema puede usarse el álgebra de los vectores. Un segmento dirigido que une a los puntos P y Q tiene por componentes:

$$\overline{PQ} = (7-5,\ 6-7,\ -1+3) = (2,\ -1,\ 2)$$

entonces, el punto R tiene por vector de posición:

$$\bar{r} = \bar{p} + \frac{2}{3}\overline{PQ}$$

por lo que:

$$\bar{r} = \left(\frac{19}{3},\ \frac{19}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$$

finalmente, las coordenadas de R son:

$$R\left(\frac{19}{3},\ \frac{19}{3},-\frac{5}{3}\right)$$

3.3 LA RECTA

Al igual que para el punto, no se pretenderá establecer una definición formal de recta, ya que se trata de otro concepto que puede aceptarse intuitivamente. En lugar de eso, se enlistarán las formas en las que se puede fijar la posición de una recta en el espacio.

Una recta queda definida en el espacio si se conocen:

— un punto de ella y la dirección de la recta, definiéndose ésta con un vector;
— dos puntos de la recta;
— dos planos no paralelos que la contengan.

3.3.1 REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Una ecuación vectorial de la recta L es la descripción matemática de cómo se mueve un vector de posición para que con su desplazamiento, su punto extremo *barra* todos los puntos de L.

Para determinar una ecuación vectorial de una recta se necesitan como datos las coordenadas de un punto de ella, o el vector de posición de dicho punto; y un vector que indique la dirección de la recta, que se conoce como *vector director*.

Sea el punto $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$, con vector de posición $\overline{p_0} = (x_0, y_0, z_0)$, un punto de la recta L, y sea el vector $\overline{u} = (a, b, c)$ un vector director de L:

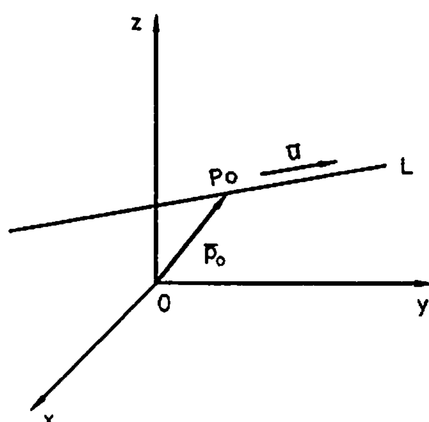


FIGURA 3.2

Cualquier punto R que pertenezca a L puede obtenerse como la suma del vector $\overline{p_0}$ más un vector con la dirección de $\overline{u}$ y con la magnitud necesaria para alcanzar al punto R:

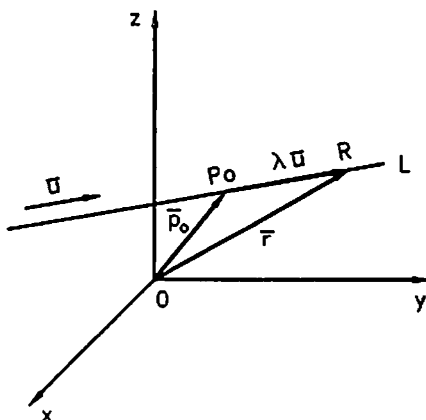


FIGURA 3.3

es decir: $\bar{r} = \overline{p_0} + \lambda\bar{u}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

El escalar λ es un parámetro que permite aumentar o disminuir el módulo del vector y hasta invertir su sentido, con lo que se recorre toda la recta. Entonces, la ecuación vectorial de L queda:

$$\bar{r} = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c); \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

o bien:

$$\bar{r} = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c); \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Obsérvese que el procedimiento anterior para alcanzar cualquier punto de la recta L fue utilizado para la solución del ejercicio 3.2.

3.3.2 REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA

Una vez que se conoce una ecuación vectorial de la recta L es muy sencillo determinar su correspondiente expresión paramétrica, por igualdad de vectores de la ecuación vectorial

$$\bar{r} = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c); \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

como el vector $\bar{r}$ representa un punto cualquiera de L, $\bar{r} = (x, y, z)$, entonces:

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda a , y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$$

las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} ;\lambda \in \mathbb{R}$$

Es conveniente señalar que:

— Una recta no tiene una sola ecuación vectorial ya que el punto de apoyo P_0 tiene que pertenecer a L como única condición, por lo que si se elige otro punto resulta otra ecuación. Por otra parte, el vector $\bar{u}$ debe indicar la dirección de la recta y, entonces, también hay una infinidad de vectores directores.

— La representación paramétrica de una recta tampoco es única, por las mismas razones expuestas.

— Cualquier ecuación vectorial de una recta y, por lo tanto, sus correspondientes ecuaciones paramétricas, contienen un solo parámetro. En el capítulo 4, Curvas, se generalizará este hecho para cualquier curva.

— La determinación de la representación paramétrica de una recta cuando se conoce una de sus ecuaciones vectoriales o viceversa, es muy sencilla con el concepto de igualdad entre vectores.

EJERCICIO 3.3. Determinar una ecuación vectorial y sus correspondientes ecuaciones paramétricas de la recta R que contiene al punto A de coordenadas $A(-1, 0, 5)$ y que es paralela al vector $\bar{v} = (3, -2, 0)$.

SOLUCIÓN:
Una ecuación vectorial de R es:

$$\bar{r} = (-1, 0, 5) + t\,(3,-2, 0)$$

o bien:

$$\bar{r} = (-1 + 3t, -2t, 5); \quad t \in \mathbf{R}$$

las correspondientes ecuaciones paramétricas son:

$$R: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2t \\ z = 5 \end{cases} ; \quad t \in \mathbf{R}$$

obviamente no importa ni el nombre del punto de la recta, ni del vector director, ni del parámetro.

EJERCICIO 3.4. Determinar una ecuación vectorial de la recta L que pasa por los puntos $P(3,-2,-1)$ y $Q(2, 3, -6)$.

SOLUCIÓN:

Para la ecuación vectorial se requiere de un punto que pertenezca a la recta y se conocen dos, pero también se necesita de un vector director, el cual puede ser el segmento dirigido $\overline{PQ}$.

$$\overline{PQ} = (-1, 5, -5)$$

si se emplea al punto Q como apoyo:

$$\bar{r} = (2, 3, -6) + m(-1, 5, -5); \quad m \in \mathbb{R}$$

3.3.3 REPRESENTACIÓN CARTESIANA DE LA RECTA

Existen dos formas de representación cartesiana de una recta: la forma simétrica y la general.

a) Forma simétrica de las ecuaciones de la recta

Recordando las ecuaciones paramétricas de una recta:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} ;\lambda \in \mathbb{R}$$

si las tres componentes del vector director son diferentes de cero, puede despejarse al parámetro de cada una de las ecuaciones paramétricas e igualar, obteniéndose:

$$L: \left\{ \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \right.$$

Ésta es la llamada *forma simétrica de las ecuaciones de la recta L.*

El hecho de que en la forma simétrica se tengan dos signos de igual significa que se necesita siempre de dos ecuaciones cartesianas para representar a una curva cualquiera, en este caso particular, una recta. Es frecuente que se piense que son tres ecuaciones; sin embargo, son sólo dos ecuaciones independientes. Posteriormente en este mismo tema, se verá que cada una de estas ecuaciones representa un plano; es decir, los puntos que satisfacen simultáneamente las ecuaciones de dos planos son los que forman la recta de intersección.

EJERCICIO 3.5. Sea la recta L de ecuaciones paramétricas:

$$L: \begin{cases} x = -3t \\ y = 4 - 2t \quad ; t \in \mathbf{R} \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

Determinar unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica.

SOLUCIÓN:

De cada una de las ecuaciones paramétricas se despeja t:

$$t = \frac{x}{-3}; \quad t = \frac{y-4}{-2}; \quad t = \frac{z-1}{5}$$

igualando:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{5}$$

Si en cualquier vector director de una recta una de sus componentes es nula, esto significa que dicho vector es paralelo a un plano coordenado, precisamente al que tiene por nombre el de las variables cuyas componentes son diferentes de cero; así, si la segunda componente del vector director vale cero y las otras dos componentes son diferentes de cero, el vector es paralelo al plano XZ, de manera que la recta también será paralela a dicho plano, lo que quiere decir que la ordenada de todos los puntos de la recta será la misma y una de las ecuaciones de la recta así lo debe indicar. La otra ecuación se obtiene con lo señalado previamente.

EJERCICIO 3.6. Determinar las ecuaciones cartesianas en forma simétrica de la recta que contiene a los puntos $M(1,-3, 7)$ y $N(1, 2, 9)$.

SOLUCIÓN:
Un vector director de la recta puede ser el segmento dirigido $\overline{MN}$; es decir:

$$\overline{MN} = (0,\ 5,\ 2)$$

como la primera componente de este vector es nula, la recta es paralela al plano YZ, por lo que la abscisa de todos los puntos de la recta es constante e igual a uno, ya que ambos puntos de la recta tienen dicho valor como abscisa; entonces, las ecuaciones de la recta, si se emplea al punto N como apoyo son:

$$R: \begin{cases} \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-9}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Si cualquier vector director de una recta tiene dos componentes nulas, se sabe por el álgebra vectorial que esos vectores son paralelos al eje coordenado que lleva por nombre el de la variable para la cual el vector director tiene componente no nula; por ejemplo, si un vector tiene su segunda y su tercera componente nulas y la primera diferente de cero, el vector es paralelo al eje X y, por lo tanto, la recta con esa dirección tiene ordenada y cota constantes y sus ecuaciones deben indicarlo así.

Un vector director no puede tener sus tres componentes nulas pues no indicaría una dirección determinada.

EJERCICIO 3.7. Determinar unas ecuaciones paramétricas y las cartesianas en forma simétrica de la recta P que pasa por el punto $Q(-4,-1,\ 0)$ y que es paralela al eje Z.

SOLUCIÓN:
Un vector director de la recta P puede ser $\bar{u} = (0,\ 0,\ 7)$ o cualquiera que tenga sus dos primeras componentes nulas, de manera que las ecuaciones paramétricas pueden ser:

$$P: \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \\ z = 7m \end{cases} \quad ;m \in \mathbb{R}$$

o simplemente:

$$P: \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \\ z = \psi \end{cases} \quad ;\psi \in \mathbb{R}$$

Por otra parte, las ecuaciones cartesianas en forma simétrica son:

$$P: \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

El hecho de que no intervenga la variable z significa que ésta puede tomar cualquier valor; además, recuérdese que una recta queda representada siempre por dos ecuaciones cartesianas.

b) Forma general de las ecuaciones de la recta

La forma general de las ecuaciones cartesianas de una recta puede simbolizarse de la siguiente manera:

$$L: \begin{cases} A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z + D_1 = 0 \\ A_2\, x + B_2\, y + C_2\, z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Por el momento considérese esta representación como una definición, a reserva de que cuando se estudie *el plano*, se verá que cada una de las ecuaciones cartesianas de una recta representa un plano, por lo que los puntos que satisfagan a los dos planos constituyen la recta de intersección de dichos planos. Esto obviamente provoca que existan una infinidad de parejas de ecuaciones cartesianas de una recta, pues existen una infinidad de planos que la contienen.

Ejercicio 3.8. Sea la recta W de ecuaciones:

$$W: \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + y + 3z - 14 = 0 \end{cases}$$

Determinar unas ecuaciones cartesianas, en forma simétrica, de W.

Solución:

Para obtener las ecuaciones en forma simétrica de W, se cuenta con sus ecuaciones en forma general, de manera que si de éstas pueden conocerse dos puntos de W, entonces puede tenerse un vector director. Es conveniente aclarar que no es la única manera de resolver este ejercicio, pero que un método más sencillo, quizás, se podrá aplicar cuando se estudie el plano.

Un punto de W debe satisfacer sus dos ecuaciones, de manera que si arbitrariamente se asigna un valor a una de las variables, al resolver el sistema resultante se tendrán los otros valores de las coordenadas del punto; así, si $z = 0$:

$$\begin{cases} 2x - y = -5 & \quad ...(1) \\ x + y = 14 & \quad ...(2) \end{cases}$$

sumando (1) y (2):

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

llevando este valor a (2):

$$3 + y = 14 \Rightarrow y = 11$$

entonces, un punto de W es $A(3,\ 11,\ 0)$.

Ahora, si $y = 1$:

$$\begin{cases} 2x - 1 + 5 = 0 & \quad ...(3) \\ x + 1 + 3z - 14 = 0 & \quad ...(4) \end{cases}$$

de inmediato, de (3) se obtiene que $x = -2$; y considerando este valor en (4) se tiene que $z = 5$; por lo que otro punto de W tiene por coordenadas:

$$B(-2,\ 1,\ 5).$$

El segmento dirigido $\overline{AB} = (-5, -10, 5)$ puede servir como vector director de la recta, pero como sólo interesa su dirección, el vector director que se usará es:

$$\bar{u} = -\frac{1}{5}\,\overline{AB} = (1,\ 2, -1)$$

Tomando al punto A como apoyo, las ecuaciones quedan:

$$W: \left\{ x - 3 = \frac{y - 11}{2} = -z \right.$$

3.3.4 RELACIONES ENTRE RECTA Y PUNTO

a) Distancia entre un punto y una recta

DEFINICIÓN 3.1. *Se llama distancia de un punto a una recta a la distancia mínima entre los dos; es decir, la que se mide perpendicularmente a la recta.*

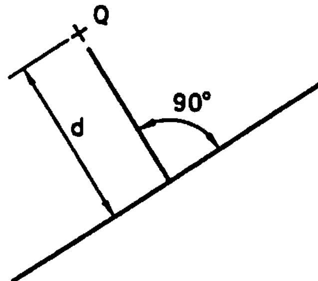


FIGURA 3.4

Para calcular la distancia entre un punto Q y una recta L, considérese la figura 3.5

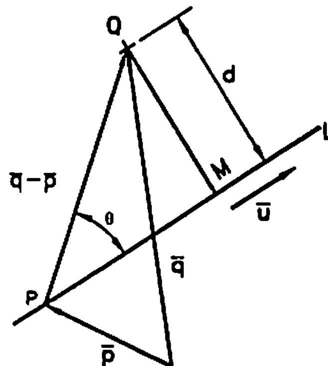


FIGURA 3.5

En la figura se tiene el triángulo QMP en el que los vértices son el punto Q, del cual se desea calcular su distancia a la recta L; el punto M que es el punto de la recta L que se encuentra a la mínima distancia del punto Q y el punto P, que es un punto cualquiera de la recta L. Por la definición de distancia de un punto a una recta, sea cual sea el punto P que se elija de L, se formará un triángulo rectángulo con el cateto QM. En dicho triángulo, el ángulo θ es el formado por el vector $\bar{q} - \bar{p}$ y el vector $\bar{u}$ que indica la dirección de L. La distancia d es igual a la longitud del cateto QM; de la figura 3.5:

$$d = |\bar{q} - \bar{p}| \text{ sen } \theta$$

si se multiplica y divide entre el módulo de $\bar{u}$, que no puede ser nulo ya que se trata de un vector director:

$$d = \frac{|\bar{q} - \bar{p}|\ |\bar{u}| \operatorname{sen} \theta}{|\bar{u}|}$$

pero

$$|\bar{q} - \bar{p}|\ |\bar{u}| \operatorname{sen} \theta = |(\bar{q} - \bar{p}) \times \bar{u}|$$

finalmente, la expresión queda:

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p}) \times \bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

EJERCICIO 3.9. Calcular la distancia del punto $A(2, 3, 6)$ a la recta L de ecuaciones:

$$L: \left\{ x + 2 = 7 - y = \frac{2z + 2}{8} \right.$$

SOLUCIÓN:

Para aplicar la expresión deducida, es necesario conocer uno de sus vectores directores y un punto cualquiera de ella. Debe tenerse precaución porque la expresión analítica de L no está en forma simétrica, aunque lo parece. Para que fuera la forma simétrica, los coeficientes de las variables x, y, z deberían ser la unidad. Para determinar lo que se requiere, puede trabajarse para llegar a unas ecuaciones paramétricas, si se igualan las ecuaciones dadas a un parámetro λ:

$$x + 2 = 7 - y = \frac{2z + 2}{8} = \lambda$$

considerando la primera igualdad:

$$x + 2 = \lambda \quad \rightarrow \quad x = -2 + \lambda$$

ahora, de la segunda:

$$7 - y = \lambda \quad \rightarrow \quad y = 7 - \lambda$$

de la tercera:

$$\frac{2z + 2}{8} = \lambda \quad \rightarrow \quad z = -1 + 4\lambda$$

por lo que la recta *L* queda expresada paramétricamente:

$$L: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 7 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

de esta expresión puede tenerse un punto de la recta si $t = 0$: $P(-2, 7,-1)$. Por otra parte, un vector director puede ser:

$$\bar{u} = (1,-1, 4)$$

la distancia está dada por:

$$d = \frac{|(\bar{a} - \bar{p}) \times \bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

por lo que:

$$\bar{a} - \bar{p} = (4,-4, 7)$$

entonces:

$$(\bar{a} - \bar{p}) \times \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -9\,i + 9\,j$$

la distancia es, entonces:

$$d = \frac{\sqrt{81 + 81}}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}}$$

finalmente:

$$d = 3 \text{ unidades de longitud.}$$

EJERCICIO 3.10. Para la recta L del ejercicio anterior, determinar las coordenadas del punto M, perteneciente a L, localizado a la menor distancia del punto A.

SOLUCIÓN:

La expresión analítica de cualquier segmento dirigido que tenga su punto origen en un punto de la recta L y su punto extremo en el punto A es:

$$\overline{PA} = (2, 3, 6) - (-2 + \lambda, 7 - \lambda, -1 + 4\lambda) =$$

$$= (4 - \lambda, -4 + \lambda, 7 - 4\lambda)$$

de todos los segmentos dirigidos expresados, sólo uno tiene la característica de perpendicularidad con la recta L, es decir, con el vector $\bar{u}$: entonces:

$$\overline{PA} \perp \bar{u} \quad \rightarrow \quad \overline{PA} \cdot \bar{u} = 0$$

$$(4 - \lambda, -4 + \lambda, 7 - 4\lambda) \cdot (1, -1, 4) = 0$$

efectuando el producto:

$$4 - \lambda + 4 - \lambda + 28 - 16\lambda = 0$$

$$36 - 18\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2$$

llevando este valor a la expresión paramétrica de L:

$$\begin{cases} x = -2 + 2 = 0 \\ y = 7 - 2 = 5 \\ z = -1 + 4(2) = 7 \end{cases}$$

entonces $M(0, 5, 7)$.

3.3.5 RELACIONES ENTRE RECTA Y RECTA

a) Ángulo entre dos rectas

DEFINICIÓN 3.2. *El ángulo entre dos rectas es el ángulo que forman sus vectores directores. Es decir:*

$$\theta = \text{ang cos} \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

donde $\bar{u}$ *es un vector director de una de las rectas y* $\bar{v}$ *es un vector director de la otra.*

Con esta definición es claro que dos rectas siempre forman ángulo aunque no tengan puntos en común, ya que dos vectores siempre forman ángulo. También se tiene que dos rectas en realidad forman dos ángulos, los cuales son suplementarios.

EJERCICIO 3.11. Calcular el ángulo agudo que forman las rectas L y M expresadas por:

$$L: \begin{cases} \dfrac{2x-3}{4} = \dfrac{5-z}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

$$M: \quad \bar{p} = (2 - 3\,t,\ 4, -t) \quad ; t \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN:

Para obtener un vector director de cada una de las dos rectas, si en la primera de las ecuaciones de L se divide en el primer miembro, tanto en el numerador como en el denominador entre dos; y el segundo miembro, entre menos uno:

$$L: \begin{cases} \dfrac{x - \dfrac{3}{2}}{2} = \dfrac{z-5}{-2} \\ y = -3 \end{cases}$$

como L ya está expresada ahora cartesianamente en forma simétrica, uno de sus vectores directores es:

$$\bar{b} = (2,\ 0, -2)$$

pero, como lo que importa es su dirección, para trabajar con números más pequeños puede elegirse como vector director de L a:

$$\bar{a} = (1, 0, -1);$$

Por otra parte, de la ecuación vectorial conocida de M se tiene que uno de sus vectores directores es:

$$\bar{c} = (-3, 0, -1);$$

por lo que uno de los ángulos que forman L y M es:

$$\theta = \text{ang cos} \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{|\bar{a}||\bar{c}|}$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} \theta &= \text{ang cos} \frac{(1, 0, -1) \cdot (-3, 0\ -1)}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \\ &= \text{ang cos} \frac{-3 + 1}{\sqrt{20}} = \\ &= \text{ang cos} \frac{-2}{\sqrt{20}} = \\ &\approx 116.57° \end{aligned}$$

como se requiere calcular el ángulo agudo y los dos ángulos que forman las rectas son suplementarios, se tiene:

$$\beta = 180° - \theta$$

finalmente:

$$\beta = 63.43°$$

b) Condiciones de perpendicularidad, paralelismo y coincidencia

TEOREMA 3.1. *Sean las rectas L y M con vectores directores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, respectivamente; entonces:*

i) L y M son perpendiculares si y sólo si $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$;

ii) L y M son paralelas si $\bar{u} = \lambda \bar{v}$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda \neq 0$; *o si* $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$;

iii) algunos autores dicen que L y M son coincidentes si L y M cumplen con las condiciones de paralelismo y un punto cualquiera de L pertenece también a M; aunque realmente se trata de la misma recta representada con dos diferentes expresiones.

La demostración del teorema anterior es una consecuencia de la definición 3.2 y de las propiedades de los vectores.

EJERCICIO **3.12.** Determinar si las rectas T y R son perpendiculares, paralelas o coincidentes, si:

$$T: \begin{cases} x = 3 + m \\ y = -1 - 2\,m \\ z = 4 - m \end{cases} \quad ; m \in \mathbb{R}$$

$$R: \bar{r} = (2 - 2\,h,\ 1 + 4\,h,\ 5 + 2\,h) \quad ; h \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN:

De las expresiones analíticas de T y de R se puede ver que unos de sus vectores directores son, respectivamente:

$$\overline{u_T} = i - 2\,j - k \quad y \quad \overline{u_R} = -2\,i + 4\,j + 2\,k$$

es evidente que

$$\overline{u_T} = -2\ \overline{u_R}$$

por lo que se cumple con una de las condiciones de paralelismo; por otra parte, un punto de T es:

$$P(3, -1, 4)$$

ahora bien, si $x = 3$ en la expresión vectorial de R, se tiene:

$$3 = 2 - 2\,h \quad \Rightarrow \quad h = -\frac{1}{2}$$

sustituyendo este valor en la ecuación de R:

$$\bar{r} = (2 + 1, 1 - 2, 5 - 1) = (3,-1, 4)$$

que es el vector de posición del punto P, por lo que el punto también pertenece a R y se trata de la misma recta pero con expresiones diferentes, o bien, son *rectas coincidentes.*

c) Intersección entre dos rectas

DEFINICIÓN 3.3. *Cuando dos rectas en el espacio se intersecan se dice que se cortan y si no tienen intersección, entonces se cruzan.*

Para determinar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas que se cortan, debe trabajarse simultáneamente con sus expresiones analíticas. Para mayor facilidad, es recomendable usar las expresiones paramétricas de ambas rectas, con lo que se reduce el número de incógnitas.

EJERCICIO 3.13. Si las rectas L y M se cortan, determinar las coordenadas de su punto de intersección, donde:

$$L: \left\{ x - 4 = 1 - y = \frac{z - 3}{2} \right.$$

$$M: \bar{r} = (5 - m, 6 - 2m, -3 + 2m) \quad ; m \in \mathbb{R}$$

por la recomendación anterior, se obtienen las expresiones paramétricas de L y de M:

$$L: \begin{cases} x = 4 + n \\ y = 1 - n \\ z = 3 + 2n \end{cases} \quad ; n \in \mathbb{R}$$

$$M: \begin{cases} x = 5 - m \\ y = 6 - 2m \\ z = -3 + 2m \end{cases} \quad ; m \in \mathbb{R}$$

Es lógico que el parámetro utilizado para expresar a L no tiene por qué ser el mismo que el empleado para M, por lo que deben darse nombres diferentes. Igualando las abscisas y las ordenadas se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si los valores de los parámetros que resuelven el sistema satisfacen también a la ecuación obtenida al igualar las cotas, esto significa que las rectas se cortan; si con dichos valores se llega a una igualdad obvia como 3 = 3, es una misma recta y su intersección son todos los puntos; y si se llega a una incongruencia como 3 = 2, las rectas se cruzan.

$$\begin{cases} 4 + n = 5 - m \\ 1 - n = 6 - 2m \end{cases}$$

simplificando y ordenando:

$$\begin{cases} n + m = 1 \\ -n + 2m = 5 \end{cases}$$

resolviendo el sistema:

$$n = -1$$
$$m = 2$$

igualando las cotas:

$$3 + 2n = -3 + 2m$$

sustituyendo los valores obtenidos:

$$3 + 2(-1) = -3 + 2(2)$$

que sí se satisface, por lo que sustituyendo el valor de n en las ecuaciones de L o el de m en las de M se tienen las coordenadas del punto de intersección:

$$I\,(3,\ 2,\ 1).$$

d) Distancia entre dos rectas

DEFINICIÓN 3.4. *Se llama distancia entre dos rectas a la mínima distancia entre las dos. Obviamente si las rectas se cortan su distancia mínima es cero, pero si son paralelas o se cruzan, su distancia mínima es la que se mide perpendicularmente a ambas.*

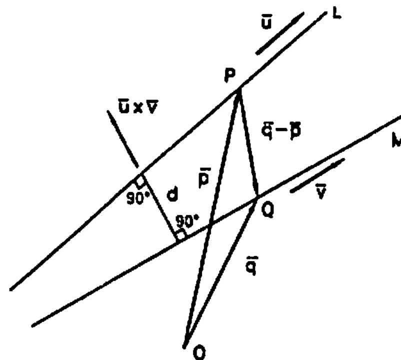


FIGURA 3.6

Sean las rectas L y M de la figura 3.6, en la cual están representados los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, que son vectores directores de L y de M, respectivamente. La distancia d entre L y M también se representa ahí. Dicha distancia se mide en la dirección perpendicular a ambas rectas, esta dirección puede obtenerse por medio del vector $\bar{u} \times \bar{v}$. Si se elige un punto P de la recta L y un punto Q de la recta M, escogidos aleatoriamente, analizando con detenimiento la figura, puede deducirse que la distancia buscada es igual al módulo de la proyección del vector $\bar{q} - \bar{p}$ en la dirección del vector $\bar{u} \times \bar{v}$; o lo que es lo mismo, es igual al valor absoluto de la componente escalar del vector $\bar{q} - \bar{p}$ en la dirección de $\bar{u} \times \bar{v}$; es decir:

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u} \times \bar{v}|}{|\bar{u} \times \bar{v}|}$$

Obsérvese que en esta expresión, las barras del numerador señalan valor absoluto ya que encierran un escalar, mientras que las del denominador significan el módulo de un vector. Por otra parte, aunque en el numerador se tiene un producto mixto, no se recomienda calcularlo como un determinante, ya que el valor del producto vectorial entre los dos vectores directores debe usarse también en el denominador. Finalmente, si las rectas son paralelas, la expresión anterior conduce a una indeterminación pues $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$, por lo que tanto el numerador como el denominador serán nulos. Entonces, si las rectas son paralelas, lo aconsejable es calcular la distancia entre ellas por medio de la obtención de la distancia de un punto de una de ellas a la otra recta.

EJERCICIO 3.14. Calcular la distancia entre las rectas R y S de ecuaciones:

$$R: \begin{cases} x = -1 \\ y = -3z + 9 \end{cases}$$

$$S: \bar{s} = (2,-4 + 3t,-9 - t) \quad ; t \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN:

Primero se obtendrán los vectores directores. Para la recta R, si en su segunda ecuación se dividen ambos miembros entre -3:

$$R: \begin{cases} x = -1 \\ \dfrac{y}{-3} = z - 3 \end{cases}$$

De aquí se deduce que uno de sus vectores directores es $\bar{u} = (0,-3, 1)$.

Ahora para S resulta más sencilla la deducción pues se cuenta con una ecuación vectorial y uno de sus vectores directores es $\bar{v} = (0, 3,-1)$.

Como puede observarse, las rectas son paralelas. Para calcular la distancia entre ellas, se calculará la distancia de un punto de R a la recta S.

Un punto de L es $P(-1, 0, 9)$. Como se conoce un vector director de S, será necesario determinar un punto de ella. Éste puede ser $Q(2,-4,-9)$. De acuerdo con la fórmula:

$$d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p}) \times \bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

que es la expresión que permite calcular la distancia de un punto a una recta.

$$\bar{q} - \bar{p} = (2,-4,-9) - (-1, 0, 3) = (3,-4,-12)$$

$$(\bar{q} - \bar{p}) \times \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & -12 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-40,-3,-9)$$

entonces:

$$d = \frac{\sqrt{1600 + 9 + 81}}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{\frac{1690}{10}}$$

finalmente:

$$d = 13 \text{ unidades de longitud.}$$

EJERCICIO 3.15. Calcular la distancia entre las rectas:

$$L: \bar{r} = (4 + 3t)\, i + (-3 - 2t)\, j + (-2t)\, k \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$M: \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = z + 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:
Unos vectores directores de las rectas L y M son, respectivamente:

$$\bar{u} = (3,-2,-2) \text{ y } \bar{v} = (3, 0, 1).$$

Es claro que las rectas no son paralelas. Ahora:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\, i + 3\, j + 6\, k$$

Por otra parte, un punto de L es $P(4,-3, 0)$; mientras que un punto de M es $Q(2, 2,-5)$. Entonces:

$$\bar{q} - \bar{p} = (2, 2,-5) - (4,-3, 0) = (-2, 5,-5),$$

aplicando la expresión correspondiente:

$$d = \frac{|(-2, 5,-5) \cdot (-2, 3, 6)|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} =$$

$$= \frac{49}{7} =$$

$$= 7 \text{ unidades de longitud.}$$

3.4 EL PLANO

Tal como se procedió con el punto y con la recta, no se intentará definir al plano. Se considera que una definición resulta complicada y hasta cierto punto inútil, ya que intuitivamente se tiene la noción de un plano. De nuevo, mejor se reflexionará sobre las formas en las que se puede determinar la posición de un plano en el espacio.

La posición de un plano queda determinada si se conoce:

- un punto de él y dos vectores directores no paralelos;
- tres puntos no alineados del plano;
- una recta contenida en él y un punto del plano que no pertenezca a la recta;
- dos rectas que se cortan, contenidas en el plano;
- dos rectas paralelas que pertenezcan al plano;
- un punto del plano y un vector perpendicular a él (vector normal).

3.4.1 REPRESENTACIÓN VECTORIAL DEL PLANO

Recuerdese que una ecuación vectorial de una recta es la descripción matemática del desplazamiento de un vector de posición para que toque todos los puntos de la recta con su extremo. De manera análoga, una ecuación vectorial del plano P es la descripción matemática del movimiento de un vector de posición para que con su punto extremo recorra todo el plano.

Para establecer una ecuación vectorial del plano P es necesario contar, como datos, con las coordenadas de un punto A que pertenezca al plano y que sirva como apoyo, y con las componentes de dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ paralelos al plano pero no paralelos entre sí, es decir, dos vectores directores.

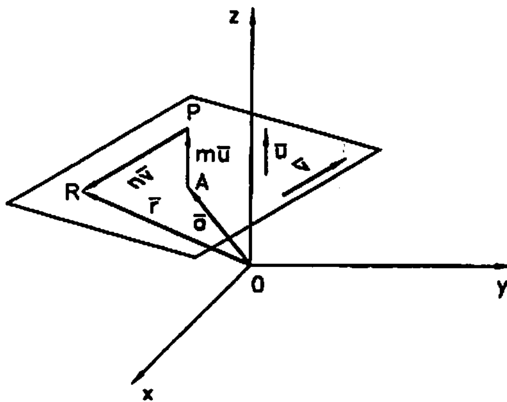


FIGURA 3.7

De la figura 3.7 puede deducirse que para que cualquier punto *R* de *P* sea alcanzado por un vector de posición, y procediendo de manera similar que con la recta, al vector de posición del punto de apoyo *A* puede sumársele un vector que lleve la dirección de $\bar{u}$ pero de tal magnitud que sumándole otro vector, pero ahora con la dirección de $\bar{v}$ y con un módulo adecuado, toque al punto *R*; es decir:

$$\bar{r} = \bar{a} + m\,\bar{u} + n\,\bar{v} \quad ; m, n \in \mathbb{R}$$

Ésta es la ecuación vectorial del plano y en ella m y n son parámetros que permiten asignar la magnitud que se necesite a los vectores $m\,\bar{u}$ y $n\,\bar{v}$, los cuales son paralelos a los vectores directores.

Obsérvese que, como con la recta, hay una infinidad de ecuaciones vectoriales para un mismo plano *P*, ya que basta con tener otro punto de apoyo, o algún vector director diferente, para que la ecuación sea distinta.

Por otra parte, también es conveniente aclarar que lo que se representa en la figura 3.7, y en cualquiera otra en la que se muestre un plano, es un segmento del plano puesto que su extensión es infinita, lo que impide su representación. Si se le dibujan *extremos o bordes* sólo es para dar una idea de la localización del plano, pero obviamente no termina ahí. Por último, nótese que las ecuaciones vectoriales de un plano tienen en ellas dos parámetros, a diferencia de las de la recta en las que interviene un solo parámetro.

EJERCICIO 3.16. Obtener una ecuación vectorial del plano que contiene los puntos *A* (3, -2, 0), *B* (4, 0, 1) *C* (-2, 5, 1).

SOLUCIÓN:
Como punto de apoyo puede servir cualquiera de los tres que son dato. Ahora, para los vectores directores se usarán los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (1, 2, 1);$$

$$\overline{AC} = (-5, 7, 1)$$

entonces, si el punto de apoyo es *C*, la ecuación resulta:

$$\bar{r} = (-2, 5, 1) + m\,(1, 2, 1) + n\,(-5, 7, 1) \quad ; m, n \in \mathbb{R}$$

finalmente:

$$\bar{r} = (-2 + m - 5n, 5 + 2m + 7n, 1 + m + n) \quad ; m, n \in \mathbb{R}$$

3.4.2 REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DEL PLANO

Para establecer las tres ecuaciones paramétricas del plano P basta, como en el estudio de la recta, con usar el concepto de igualdad entre vectores.

EJERCICIO 3.17. Determinar una ecuación vectorial y sus correspondientes ecuaciones paramétricas, del plano que contiene a la recta L y al punto A si:

$$L: \bar{p} = (-3 + t, t, 5 - 2t) \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$A(1, 4, 5).$$

SOLUCIÓN:
El punto de apoyo del plano puede ser A y uno de sus vectores directores es el de la recta. El otro puede ser un segmento dirigido de un punto cualquiera de la recta al punto A:

$$\bar{u} = (1, 1, -2);$$

un punto de L es $B(-3, 0, 5)$; entonces:

$$\bar{v} = (1, 4, 5) - (-3, 0, 5) = (4, 4, 0)$$

o bien:

$$\bar{w} = (1, 1, 0)$$

para la ecuación vectorial:

$$\bar{r} = (1, 4, 5) + \alpha(1, 1, -2) + \beta(1, 1, 0) \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

o bien:

$$\bar{r} = (1 + \alpha + \beta, 4 + \alpha + \beta, 5 - 2\alpha) \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

y sus correspondientes ecuaciones paramétricas:

$$L: \begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 4 + \alpha + \beta \\ z = 5 - 2\alpha \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3.4.3 REPRESENTACIÓN CARTESIANA DEL PLANO

Para establecer la representación cartesiana del plano, puede procederse como con la recta; es decir, eliminar los parámetros con las tres ecuaciones paramétricas. Lógicamente en este caso, al ser dos parámetros, el resultado será una sola ecuación. Aunque ese puede ser el camino, conviene más trabajar de otra manera. Para ello, recuérdese que se dijo que la localización de un plano queda determinada si se conoce un punto de él y un vector perpendicular al plano, al cual se denomina *vector normal.*

Sea el plano P de la figura 3.8, de dicho plano se conoce el punto A o su vector de posición $\bar{a}$, y un vector normal $\bar{N}$. Por ser el vector normal perpendicular al plano P, cualquier segmento dirigido que tenga su punto origen en A y su extremo en cualquier punto que pertenezca a P también será ortogonal a $\bar{N}$: $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{N} = 0$.

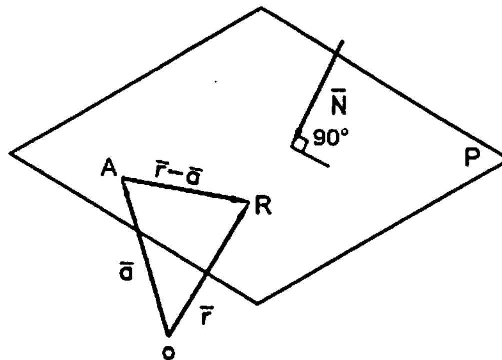


FIGURA 3.8

A esta expresión algunos autores le llaman la *ecuación normal* del plano.

Del desarrollo de esta ecuación puede obtenerse con facilidad la ecuación cartesiana del plano. Así, si el punto A tiene por vector de posición $\bar{a} = (x_o, y_o, z_o)$ y el vector normal es $\bar{N} = (A, B, C)$; como el punto R es un punto cualquiera, su vector de posición

es $\bar{r} = (x, y, z)$; entonces:

$$[(x, y, z) - (x_o, y_o, z_o)] \cdot (A, B, C) = 0$$

$$(x - x_o, y - y_o, z - z_o) \cdot (A, B, C) = 0$$

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

$$A\,x - A\,x_o + B\,y - B\,y_o + C\,z - C\,z_o = 0$$

$$A\,x + B\,y + C\,z - A\,x_o - B\,y_o - C\,z_o = 0$$

si se hace:

$$D = -A\,x_o - B\,y_o - C\,z_o$$

se llega a la ecuación cartesiana del plano:

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

EJERCICIO 3.18. Determinar la ecuación cartesiana del plano

$$\pi: \begin{cases} x = 3 + m - 2\,n & \dots (1) \\ y = 1 - m + n & \dots (2) \\ z = 2\,m - n & \dots (3) \end{cases} \quad ;\ m, n \in \mathbb{R}$$

a) eliminando los parámetros de las ecuaciones paramétricas;
b) por medio de la ecuación normal.

SOLUCIÓN:
a) Sumando término a término (1) y (2):

$$x + y = 4 - n \qquad \dots(4)$$

multiplicando por dos a (2) y sumándosela a (3):

$$2y + z = 2 + n \qquad \ldots(5)$$

ahora sumando (4) y (5):

$$x + 3y + z = 6.$$

b) De las ecuaciones paramétricas, dos vectores directores del plano son:

$$\bar{u} = (-2, 1, -1)$$

$$\bar{v} = (1, -1, 2)$$

entonces:

$$\bar{N} = \bar{u} \times \bar{v};$$

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, 3, 1)$$

un punto del plano tiene por vector de posición:

$$\bar{a} = (3, 1, 0)$$

por lo que:

$$[(x, y, z) - (3, 1, 0)] \cdot (1, 3, 1) = 0$$

$$(x - 3, y - 1, z) \cdot (1, 3, 1) = 0$$

$$x - 3 + 3y - 3 + z = 0$$

$$x + 3y + z - 6 = 0$$

que es la misma ecuación de π.

Si D es igual a cero, al satisfacerse la ecuación para las coordenadas del origen, significa que el plano contiene al origen.

Si uno de los coeficientes A, B o C es nulo y los otros dos no, el plano tiene un vector normal paralelo a un plano coordenado, por lo que el plano será perpendicular a dicho plano coordenado.

Si dos de los coeficientes A, B o C son nulos, el vector normal al plano es paralelo a un eje coordenado, por lo que el plano será paralelo al plano coordenado que es perpendicular al vector normal.

Los tres coeficientes A, B y C no pueden valer simultáneamente cero, pues entonces el vector normal sería el vector nulo y esto es imposible, ya que no indicaría una dirección determinada.

3.4.4 RELACIONES ENTRE PLANO Y PUNTO

a) Distancia de un punto a un plano

DEFINICIÓN 3.5. *La distancia más corta entre un punto y un plano se llama distancia de un punto a un plano. Esta distancia es la que se mide perpendicularmente al plano.*

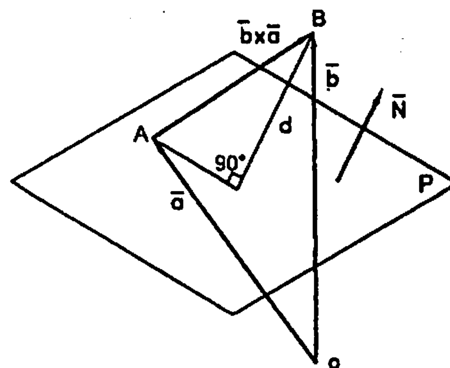


FIGURA 3.9

De la figura 3.9 puede observarse que la distancia del punto B al plano P es igual al módulo de la proyección del vector $\bar{b} - \bar{a}$ en la dirección de $\bar{N}$. El vector $\bar{b} - \bar{a}$ es el que une cualquier punto de P, en este caso A, con el punto B; y $\bar{N}$ es un vector normal al plano P. Obviamente, esta distancia también es igual al valor absoluto de la componente escalar de $\bar{b} - \bar{a}$ en la dirección de $\bar{N}$; es decir:

$$d = \frac{|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$$

EJERCICIO 3.19. Calcular la distancia del punto $B(-1, 7, 4)$ al plano P de ecuación cartesiana $3x - 4z - 6 = 0$.

SOLUCIÓN:
Para poder aplicar la expresión, se debe conocer un punto del plano y uno de sus vectores normales.

De la ecuación del plano, si $z = 0$:

$$3x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

como y no interviene, esto quiere decir que puede tomar cualquier valor, de manera que un punto de P es $A(2, 1, 0)$.

De la misma ecuación, un vector normal es $\bar{N} = (3, 0, -4)$, entonces:

$$\bar{b} - \bar{a} = (-3, 6, 4)$$

la distancia es:

$$d = \frac{|(-3, 6, 4) \cdot (3, 0, -4)|}{\sqrt{9 + 16}} =$$

$$= \frac{|-9 - 16|}{5} =$$

$$= 5 \text{ unidades de longitud.}$$

3.4.5 RELACIONES ENTRE PLANO Y RECTA

Las posiciones relativas entre una recta y un plano en el espacio sólo pueden ser: que la recta y el plano sean paralelos, que la recta esté contenida en el plano, en cuyo caso la intersección entre los dos es la recta en toda su longitud, y que la recta y el plano tengan un solo punto de intersección.

a) Intersección entre un plano y una recta

Al igual que para cualquier pareja de lugares geométricos, la manera de determinar la intersección entre ellos es hacer simultáneas sus representaciones analíticas. En este caso en

particular, conviene trabajar con la ecuación cartesiana del plano y con las ecuaciones paramétricas de la recta, con lo que al sustituir los valores de las variables x, y, z en la ecuàción del plano, el problema se reduce a una ecuación con una incógnita; sin embargo, también se puede trabajar con la ecuación cartesiana del plano y con las ecuaciones cartesianas en forma general de la recta; o bien, con las ecuaciones paramétricas de ambos lugares geométricos. Para estos casos, se tendrá un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Sea cual sea el camino elegido, si el sistema tiene una sola solución, el plano y la recta tienen un punto de intersección; si el sistema tiene una infinidad de soluciones, la recta está contenida en el plano y tienen una infinidad de puntos de intersección. Si el sistema no tiene solución, el punto y la recta no se intersecan, lo que indica que son paralelos.

EJERCICIO 3.20. Sean el plano P de ecuación $x - y + 2z = 1$ y la recta L de ecuaciones:

$$L: \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 5x + y = 5 \end{cases}$$

Determinar la intersección, si existe, entre P y L.

SOLUCIÓN:

Dado que la recta L está expresada en la forma general de sus ecuaciones cartesianas, se harán simultáneas las tres ecuaciones, la del plano y las de la recta:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 & \quad \text{...(1)} \\ 2x + y - z = 2 & \quad \text{...(2)} \\ 5x + y = 5 & \quad \text{...(3)} \end{cases}$$

sumando (1) y (2):

$$3x + z = 3 \qquad \text{...(4)}$$

sumando (1) y (3):

$$6x + 2z = 6 \qquad \text{...(5)}$$

La ecuación (5) es igual a la ecuación (4) multiplicada por dos, por lo que no son independientes. Esto quiere decir que el sistema tiene una infinidad de soluciones; por lo tanto, la recta está contenida en el plano y la intersección entre ambos es la recta.

EJERCICIO 3.21. Obtener el punto de intersección, si existe, entre el plano:

$$P: \; 3x - y + 2z = 5$$

y la recta:

$$R: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 8 + 3t \\ z = -t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN:

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación cartesiana del plano:

$$3(5 + 2t) - (8 + 3t) + 2(-t) = 5$$

$$15 + 6t - 8 - 3t - 2t = 5 \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Como el valor del parámetro es único, sí existe un punto de intersección, cuyas coordenadas se obtienen al sustituir el valor del parámetro en las ecuaciones de la recta:

$$x = 5 + 2(-2) = 1$$

$$y = 8 + 3(-2) = 2$$

$$z = -(-2) \quad = 2$$

entonces:

$$I(1, 2, 2).$$

EJERCICIO 3.22. Obtener, si existe, el punto de intersección entre el plano A y la recta T si:

$$A: 2x + y - 2z - 1 = 0$$

$$T: \left\{ x + 1 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 4}{2} \right.$$

SOLUCIÓN:

Como se indicó, conviene emplear una expresión paramétrica de la recta T:

$$T: \left\{ x + 1 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 4}{2} = \lambda \right.$$

para la primera ecuación paramétrica:

$$x + 1 = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = \lambda - 1$$

procediendo de manera análoga se tiene:

$$T: \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

ahora, sustituyendo x, y, z en la ecuación cartesiana de A:

$$2(\lambda - 1) + (3 + 2\lambda) - 2(-4 + 2\lambda) - 1 = 0$$

$$2\lambda - 2 + 3 + 2\lambda + 8 - 4\lambda - 1 = 0$$

reduciendo términos semejantes se llega a una incongruencia:

$$8 = 0$$

lo que significa que la recta y el plano no tienen puntos en común.

b) Ángulo entre recta y plano

DEFINICIÓN 3.6. *El ángulo entre una recta y un plano es el que forma la recta con su proyección perpendicular sobre el plano.*

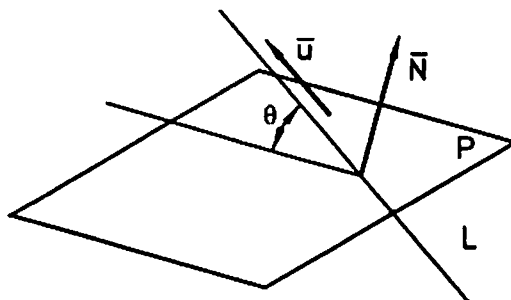


FIGURA 3.10

De la figura 3.10 se observa que el ángulo θ y el que forman el vector normal al plano con el vector director de la recta son complementarios, y por un teorema de trigonometría, se sabe que:

$$si \ \alpha + \beta = 90°, \quad \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$$

entonces:

$$\theta = \text{ang sen} \frac{\bar{N} \cdot \bar{u}}{|\bar{N}|\ |\bar{u}|}$$

donde $\bar{N}$ es un vector normal al plano y $\bar{u}$ es un vector director de la recta.

c) Condiciones de perpendicularidad, paralelismo y continencia

TEOREMA 3.2. *Sean el plano P con vector normal $\bar{N}$ y la recta L con vector director $\bar{u}$; entonces si:*

i) $\bar{N} = \lambda\bar{u}$; $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *ó* $\bar{N} \times \bar{u} = \bar{0}$ *la recta y el plano son perpendiculares;*
ii) $\bar{N} \cdot \bar{u} = 0$; *la recta y el plano son paralelos;*
iii) $\bar{N} \cdot \bar{u} = 0$; *y un punto de la recta pertenece al plano, la recta está contenida en el plano.*

EJERCICIO 3.23. Calcular el ángulo que forman la recta R y el plano P si:

$$R: \begin{cases} 2x + 3y - 5z - 3 = 0 \\ -x + 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$P: \ 5\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}y + (\ 8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}\ )z - \sqrt{3} = 0$$

SOLUCIÓN:
Para poder aplicar la expresión correspondiente, es necesario conocer un vector director de R y un vector normal a P. Este último resulta sencillo de obtener, ya que el plano está expresado en forma cartesiana; sin embargo, como de la recta se conocen unas ecuaciones cartesianas en forma general, tendrá que trabajarse un poco más. En el ejercicio 3.8 se tuvo esta necesidad y se resolvió con la determinación de dos puntos de la recta para usar el segmento dirigido que los unía; ahora lo que se hará es considerar que cada una de las ecuaciones de la recta representa un plano, por lo que el producto vectorial de los dos vectores directores expresará un vector perpendicular a ambos. Como todos los vectores perpendiculares al primer vector normal son paralelos al primer plano y todos los ortogonales al segundo vector son paralelos al segundo plano, un vector perpendicular a ambos vectores directores debe ser paralelo a los dos planos, por lo que señalará la dirección de la recta de intersección:

$$\bar{u} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$$

como:

$$\overline{N_1} = (2, 3, -5) \text{ y } \overline{N_2} = (-1, 3, -2)$$

entonces:

$$\bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 9\,i + 9\,j + 9\,k$$

pero como sólo interesa la dirección, mejor se emplea como vector director de *R* a:

$$\bar{v} = (1, 1, 1);$$

de la ecuación de *P* se tiene:

$$\bar{N} = (\, 5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}\,)$$

el ángulo es:

$$\theta = \text{ang sen } \frac{(\, 5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}) \cdot (1, 1, 1)}{\sqrt{75 + 75 + 192 + 144\sqrt{6} + 162}\ \ \sqrt{3}} =$$

$$= \text{ang sen } \frac{5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{\sqrt{504 + 144\sqrt{6}}\ \ \sqrt{3}} =$$

$$= \text{ang sen } \frac{18\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{\sqrt{1512 + 432\sqrt{6}}} =$$

$$= 60°$$

EJERCICIO **3.24.** Sea el plano *P* de ecuación cartesiana:

$$x + y - 3z - 1 = 0.$$

Determinar una ecuación vectorial de la recta simétrica a:

$$L: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

con respecto a P.

SOLUCIÓN:

En primer lugar puede determinarse, si existe, el punto de intersección entre L y P, sustituyendo las ecuaciones de R en la de P:

$$(1 + 3t) + (-2 + 2t) - 3(3 - 2t) - 1 = 0$$

eliminando paréntesis:

$$1 + 3t - 2 + 2t - 9 + 6t - 1 = 0$$

reduciendo términos semejantes:

$$11t - 11 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 1$$

por lo que, para $t = 1$ en las ecuaciones de la recta:

$$\begin{cases} x = 1 + 3(1) = 4 \\ y = -2 + 2(1) = 0 \\ z = 3 - 2(1) = 1 \end{cases}$$

entonces, el punto de intersección tiene por coordenadas $I(4, 0, 1)$.

Por otra parte, un punto cualquiera de L se obtiene si se toma $t = 0$:

$$\begin{cases} x = 1 + 3(0) = 1 \\ y = -2 + 2(0) = -2 \\ z = 3 - 2(0) = 3 \end{cases}$$

si se llama a este punto A, sus coordenadas son $A(1,-2, 3)$.

El punto simétrico de A, que se llamará B, con respecto al plano P, tiene un vector de posición que se obtendrá con la expresión:

$$\bar{b} = \bar{a} + 2 \; comp \; vect_{\bar{N}} \; \overline{AI}$$

entonces:

$$\overline{AI} = (3,\ 2,-2)$$

El vector de posición del punto B es:

$$\bar{b} = (1,-2,\ 3) + 2\left(\frac{(3,\ 2,-2)\cdot(1,\ 1,-3)}{\sqrt{1+1+9}}\right)\frac{(1,\ 1,-3)}{\sqrt{1+1+9}} =$$

$$= (1,-2,\ 3) + 2\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)\frac{(1,\ 1,-3)}{\sqrt{11}} =$$

$$= (1,-2,\ 3) + 2\ (1,\ 1,-3) =$$

$$= (3,\ 0,-3)$$

Un vector director de la recta buscada puede obtenerse con el segmento dirigido $\overline{BI}$:

$$\overline{BI} = (1,\ 0,\ 4)$$

Finalmente, si se emplea como punto de apoyo al punto I, la ecuación vectorial es:

$$\bar{r} = (4,\ 0,\ 1) + \lambda(1,\ 0,\ 4) \qquad ;\ \lambda \in \mathbf{R}$$

3.4.6 RELACIONES ENTRE PLANO Y PLANO

De la posición relativa de dos planos en el espacio se tiene que los planos sólo pueden o ser paralelos o cortarse. Algunos autores dicen que si dos planos son paralelos y un punto de ellos pertenece también al otro, los planos son coincidentes, en realidad se trata del mismo plano representado de dos maneras diferentes. Para poder determinar esta posición relativa de dos planos, conviene obtener el ángulo entre ellos.

a) Ángulo entre dos planos

Sean los planos P y Q de la figura 3.11. Si estos planos se ven de canto, con sus respectivos vectores normales, en la figura 3.12:

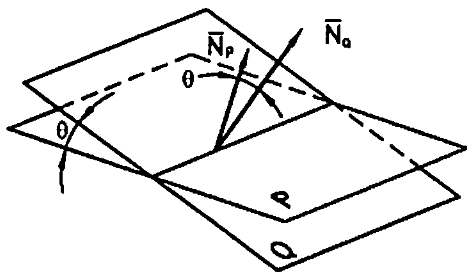


FIGURA 3.11

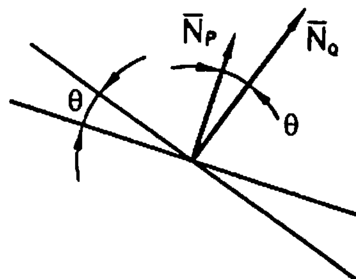


FIGURA 3.12

Por un teorema de la Geometría Elemental que relaciona el ángulo formado por rectas respectivamente perpendiculares, se tiene que el ángulo formado por los planos es igual al formado por sus vectores normales; es decir:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\overline{N_P} \cdot \overline{N_Q}}{|\overline{N_P}|\,|\overline{N_Q}|}$$

De esta expresión se desprenden las siguientes condiciones.

b) Condiciones de perpendicularidad, paralelismo y coincidencia

TEOREMA 3.3. *Sean los planos P y Q, con vectores normales* $\overline{N_P}$ *y* $\overline{N_Q}$; *respectivamente, entonces, si:*

i) $\overline{N_P} \cdot \overline{N_Q} = 0$, *los planos son perpendiculares;*

ii) $\overline{N_P} = \lambda\, \overline{N_Q}$; $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *ó* $\overline{N_P} \times \overline{N_Q} = \overline{0}$, *los planos son paralelos;*

iii) $\overline{N_P} = \lambda\, \overline{N_Q}$; $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *ó* $\overline{N_P} \times \overline{N_Q} = \overline{0}$, *y un punto de P pertenece también a Q, se trata del mismo plano o, como dicen algunos autores, los planos son coincidentes.*

EJERCICIO 3.25. Determinar la ecuación cartesiana del plano Q que es paralelo al plano P y que pasa por el punto de intersección entre las rectas L y M si:

$$P:\ 5x - 2y + 3z - 7 = 0$$

$$L: \begin{cases} x = 6 + 4t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$M: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -10 - 3t \\ z = 7 + t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN:

El plano Q, al ser paralelo a P, puede tener como vector normal el mismo vector normal de P; es decir:

$$\bar{N} = (5, -2, 3)$$

Por otra parte, para obtener las coordenadas del punto de intersección entre L y M, pueden hacerse simultáneas sus expresiones. Para evitar confusiones, el parámetro de la recta M se renombrará como m:

$$M: \begin{cases} x = -1 - m \\ y = -10 - 3m \\ z = 7 + m \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

igualando abscisas y ordenadas se llega a:

$$6 + 4t = -1 - m$$

$$-2 - t = -10 - 3m$$

ordenando:

$$\begin{cases} 4t + m = -7 \\ -t + 3m = -8 \end{cases}$$

resolviendo el sistema:

$$t = -1, \qquad m = -3$$

Sustituyendo el valor de t en las ecuaciones de L se tiene $P(2,-1,4)$. Al sustituir el valor de m en las ecuaciones de M se llega al mismo punto. Las coordenadas del punto de intersección son $P(2,-1, 4)$. Finalmente:

$$[(x, y, z) - (2,-1, 4)] \cdot (5,-2, 3) = 0$$

$$(x - 2, y + 1, z - 4) \cdot (5,-2, 3) = 0$$

$$5x - 10 - 2y - 2 + 3z - 12 = 0$$

$$5x - 2y + 3z - 24 = 0$$

c) Intersección entre dos planos

Para determinar la expresión analítica de la recta de intersección entre dos planos no es conveniente dar lineamientos, pues depende de cómo se desee expresarla para trabajar con los planos.

EJERCICIO **3.26.** Sean los planos:

$$P: \; -x - y + 5z + 2 = 0;$$

$$Q: \; 2x + 3y - 4z - 7 = 0.$$

Determinar la expresión analítica de la recta de intersección entre P y Q de manera:

a) cartesiana en forma general;
b) cartesiana en forma simétrica;
c) vectorial;
d) paramétrica.

SOLUCIÓN:

a) Unas ecuaciones cartesianas en forma general, de la recta de intersección de P y Q, son las mismas ecuaciones del plano trabajadas simultáneamente:

$$R: \begin{cases} -x - y + 5z + 2 = 0 \\ 2x + 3y - 4z - 7 = 0 \end{cases}$$

b) Para la forma simétrica es necesario obtener un vector director y un punto de apoyo. Para el vector director se tiene:

$$\bar{u} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$$

$$\bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-11, 6, -1)$$

Asimismo, para obtener un punto de apoyo, si se hace $y = 0$ en las dos ecuaciones, se llega:

$$\begin{cases} -x + 5z + 2 = 0 \\ 2x - 4z - 7 = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema, se tiene que un punto es $P\left(\frac{9}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Las ecuaciones son:

$$R: \left\{ \frac{x - \frac{9}{2}}{-11} = \frac{y}{6} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1} \right.$$

c) Con los valores obtenidos puede escribirse una ecuación vectorial:

$$R: \ \bar{r} = \left(\frac{9}{2} - 11t, 6t, \frac{1}{2} - t\right) \ ; \in \mathbb{R}$$

d) Las ecuaciones paramétricas:

$$R: \begin{cases} x = \dfrac{9}{2} - 11t \\ y = 6t \qquad ; t \in \mathbb{R} \\ z = \dfrac{1}{2} - t \end{cases}$$

d) Distancia entre dos planos paralelos

Como se reflexionó, dos planos en el espacio o son paralelos o se cortan. Lógicamente, si se cortan su distancia es nula. Ahora, si son paralelos la distancia entre los dos es siempre la misma, independientemente de dónde se mida. Por ello, para calcular esa distancia puede obtenerse como la de un punto cualquiera de uno de los planos al otro, empleando la expresión deducida para el cálculo de la distancia de un punto a un plano.

EJERCICIO 3.27. Calcular la distancia entre los planos:

$$P: \quad -2x + 3y - 6z - 32 = 0$$

$$Q: \quad \bar{r} = (-3 + 3m, 7 + 2n, -9 - m + n) \qquad ; m, n \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN:
Si los planos P y Q no son paralelos, su distancia es cero, de otra manera se procedería como se describió. Entonces, se obtendrá un vector normal a cada plano. Para P es inmediato y su vector normal puede ser:

$$\overline{N_P} = (-2, 3, -6)$$

Para Q, como se conocen dos de sus vectores directores, se tiene:

$$\overline{N_Q} = \bar{u} \times \bar{v}$$

De la ecuación vectorial de Q se tiene:

$$\bar{u} = (3, 0, -1) \ ; \qquad \bar{v} = (0, 2, 1)$$

entonces:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 3j + 6k$$

Como puede observarse $\overline{N_P} = -\overline{N_Q}$, por lo que P y Q son paralelos o es el mismo plano. Se procederá al cálculo de su distancia; si ésta es nula, se trata del mismo plano representado de dos maneras diferentes y si es diferente de cero, son dos planos y ya se habrá calculado la distancia entre ambos.

Un punto de Q es $A(-3, 7,-9)$ y para encontrar las coordenadas de un punto de P en su ecuación puede tomarse $y = z = 0$:

$$-2x - 32 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -16;$$

por lo que un punto de P es $B(-16, 0, 0)$.

Un vector normal a ambos es:

$$\bar{N} = (-2, 3,-6)$$

de la expresión:

$$d = \frac{|(\bar{a} - \bar{b}) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (13, 7,-9)$$

entonces:

$$d = \frac{|(13, 7,-9) \cdot (-2, 3,-6)|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{|-26 + 21 + 54|}{7} =$$

$= 7$ unidades de longitud.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Calcular la distancia entre los puntos $P(2,-1,4)$ y $Q(6,-2,12)$.

3.2. Sean los puntos $A(3,2,0)$ y $B(11,-2,-1)$. Obtener las coordenadas de los puntos C y D que se localizan en los tercios del segmento $\overline{AB}$.

En los ejercicios del 3.3 al 3.6 determinar una ecuación vectorial, sus correspondientes ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica de la recta que se indica. La solución no es única.

3.3. Recta que pasa por el punto $P(2,3,6)$ y que es paralela al vector $\bar{u} = (2,3,6)$.

3.4. Recta que contiene a los puntos $A(1,-3,2)$ y $B(3,-3,2)$.

3.5. Recta paralela a la recta:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 3 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

y que contiene al punto $P(1,0,-1)$.

3.6. Recta perpendicular al plano XZ y que pasa por el punto de intersección entre las rectas:

$$L: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 6 + 3t \\ z = 6 + 2t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$M: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

3.7. Determinar las coordenadas del punto A simétrico del punto $P(1,-1,3)$ con respecto a la recta:

$$L: \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 + m \\ z = 8 + 3m \end{cases} \quad ; m \in \mathbb{R}$$

3.8. Determinar una ecuación vectorial de la recta M, simétrica de L con respecto a la recta R, si:

$$L: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$R: \left\{ 2 - x = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 13}{5} \right.$$

3.9. Sean las rectas:

$$L: \begin{cases} x = -7 + 3m \\ y = 9 - 2m \\ z = -2 + 2m \end{cases} \quad ; m \in \mathbb{R}$$

$$M: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{8 - y}{2} = z + 7 \end{cases}$$

Determinar si las rectas se cortan o se cruzan. En caso de que se corten, obtener las coordenadas de su punto de intersección; en caso de que se crucen, su distancia.

3.10. Para las rectas del ejercicio anterior, determinar las coordenadas del punto A de L, y las del punto B de M, para las cuales su distancia es la mínima entre las dos rectas.

En los ejercicios del 3.11 al 3.14 determinar una ecuación vectorial, sus correspondientes ecuaciones paramétricas y su ecuación cartesiana del plano que se señala. La solución no es única.

3.11. Plano que contiene al punto $A(-3, 1, 2)$ y tiene dos de sus vectores directores:

$$\bar{u} = -i + k; \qquad \bar{v} = 4\,i + 3\,j.$$

3.12. Plano que contiene a los puntos $A(1,-1,3)$, $B(4, 0,-2)$ y $C(-1, 2, 3)$.

3.13. Plano que contiene a las rectas:

$$L: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$M: \begin{cases} 3y - z + 1 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

3.14. Plano que contiene a las rectas:

$$L: \begin{cases} x - y + 3z + 4 = 0 \\ 2x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$M: \left\{ \frac{x - 3}{3} = \frac{1 - y}{2} = \frac{2z + 4}{5} \right.$$

3.15. Calcular uno de los ángulos que forman las rectas:

$$R: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 5t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$T: \begin{cases} \dfrac{x + 4}{5} = y - 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

3.16. Calcular la distancia entre las rectas:

$$R_1: \begin{cases} x = 5 + m \\ y = 3 \\ z = 1 - m \end{cases} \quad ; m \in \mathbb{R}$$

$$R_2: \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

3.17. Sea la recta

$$R: \left\{ \frac{x - 4}{2} = \frac{y + 1}{-2} = z \right.$$

y sea el plano:

$$P: \; 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Determinar si la recta es perpendicular, paralela u oblicua al plano P; o bien si está contenida en él.

3.18. Demostrar que la distancia del origen al plano

$$P: \; Ax + By + Cz + D = 0$$

es igual a:

$$d = \frac{|D|}{|\bar{N}|}$$

en donde $\bar{N}$ es un vector normal al plano.

3.19. Determinar la ecuación cartesiana de cada uno de los dos planos perpendiculares a la recta L, y que se localizan a una distancia de 5 unidades de longitud del origen, si:

$$L: \{ \; 3x = 2y = z$$

3.20. Sean los planos de ecuación:

$$P: \; x + y + z - 3 = 0$$

$$Q: \; -x + 2y + 3z - 12 = 0$$

Determinar la ecuación cartesiana de cada unos de los planos bisectores de P y Q.

CAPÍTULO 4

C U R V A S

4.1 INTRODUCCIÓN

La Geometría Analítica se ocupa de dos situaciones, principalmente:

— determinar las características de un lugar geométrico cuando se conoce su representación analítica o;

— determinar la representación analítica de un lugar geométrico cuando se conocen sus características.

Estas situaciones se aplican a cualquier lugar geométrico, en lo que sigue se estudiarán para las llamadas curvas.

DEFINICIÓN 4.1. *Una curva es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que satisfacen alguna de las tres condiciones siguientes:*

i) dos ecuaciones cartesianas del tipo $F(x, y, z) = 0$;

ii) una ecuación vectorial en la que interviene un parámetro;

iii) tres ecuaciones paramétricas con un parámetro.

4.2 REPRESENTACIÓN CARTESIANA

Es conveniente hacer notar que no todo par de ecuaciones cartesianas del tipo mencionado representan una curva. Esta situación se presenta por la razón de que cada una de las ecuaciones cartesianas puede representar una superficie, como puede verse en el tema correspondiente, de

manera que si las dos superficies tienen intersección, ésta es una curva. Por supuesto que si las superficies no tienen intersección, las ecuaciones que las representan no pueden resolverse simultáneamente.

Las curvas pueden ser planas o alabeadas, entendiéndose por *alabeadas* precisamente aquellas que no son planas.

EJERCICIO 4.1. Sea la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 2x - y + 3z - 17 = 0 \end{cases}$$

Determinar si el punto $P(3, 4, 5)$ pertenece a la curva.

SOLUCIÓN:

Si el punto pertenece a la curva, sus coordenadas deben satisfacer simultáneamente a las dos ecuaciones; de manera que:

$$\begin{cases} (3)^2 + (4)^2 = (5)^2 \\ 2(3) - 4 + 3(5) - 17 = 0 \end{cases}$$

que es cierto; por lo tanto, el punto sí pertenece a la curva.

EJERCICIO 4.2. En caso de que las ecuaciones siguientes representen una curva, determinar las coordenadas de un punto de ella.

$$\begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 3x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Como en las dos ecuaciones intervienen las variables x, y y z, puede darse un valor arbitrario a alguna de las variables, resultando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo, si $z = 0$, entonces:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución $x=1$; $y=2$, que con el valor arbitrario asignado a z da por resultado el punto $Q(1,2,0)$.

EJERCICIO 4.3. Determinar las coordenadas de algún punto que pertenezca a la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} (z-1)^2+(y+7)^2=3x \\ (x-2)^2+(y+7)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Si se sustituye la primera ecuación en la segunda queda:

$$(x-2)^2+3x=1,$$

desarrollando el binomio $x^2-4x+4+3x=1$.

Reduciendo términos semejantes:

$$x^2-x+3=0;$$

que es una ecuación con raíces complejas, lo cual significa que las ecuaciones anteriores no representan una curva.

Nota:

De los ejercicios anteriores puede observarse que en los dos primeros sí se tiene la representación de una curva, aunque en el caso del ejercicio 4.2 se trata de las ecuaciones de dos planos, de lo que se desprende que su intersección es una recta, lo cual no debe sorprender ya que una recta es una curva de *curvatura* cero.

Por otra parte, para determinar las ecuaciones de un punto de la curva, se fijó un valor a una de las variables, lo que geométricamente significa "cortar" a la curva con un plano paralelo a uno de los planos coordenados; en el caso del ejercicio 4.2, se determinó la intersección de la curva con el plano $z=0$.

EJERCICIO 4.4. Sea la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=y \end{cases}$$

determinar si es plana o alabeada.

SOLUCIÓN:

Si en las ecuaciones de la curva, se sustituye $y = 0 \Rightarrow z = 0$ por la segunda ecuación. Si se toma en cuenta en la primera $x = \pm 2$; entonces, dos puntos de la curva son $P_1(-2,0,0)$ y $P_2(2,0,0)$; luego, un vector de un punto de la curva a otro de ella es $\overline{P_1P_2} = (4,0,0)$.

Otro punto cualquiera de la curva se obtiene dándole el valor de un parámetro a una de las variables, por ejemplo: $y = \lambda$; $\lambda \neq 0 \rightarrow z = \lambda$; llevando estos valores a la primera ecuación: $x^2 = 4 - 2\lambda^2$; si se considera el valor positivo de la raíz ya que lo único que interesa es tener la representación de cualquier otro punto de la curva: $R(\sqrt{4-2\lambda^2}, \lambda, \lambda)$; entonces, el segmento dirigido que une al punto fijo P_1 con el otro punto cualquiera de la curva es $\overline{P_1R} = (\sqrt{4-2\lambda^2}+2, \lambda, \lambda)$. Si se multiplican vectorialmente los dos segmentos dirigidos anteriores se obtiene: $\overline{P_1P_1} \times \overline{P_1R} = (0, -4\lambda, 4\lambda)$ lo que significa que un vector perpendicular a los dos segmentos dirigidos anteriores tiene siempre la misma dirección y esto quiere decir que los puntos de esa porción de curva están en un mismo plano. Una situación similar se presenta al considerar el valor negativo de la raíz, por lo que puede afirmarse que la curva es plana.

Observaciones:

— Para determinar si una curva es plana pueden seguirse otros procedimientos menos elaborados; por ejemplo, en un curso de cálculo se estudia el concepto de torsión que permite investigar si la curva es plana, pero esto rebasa los alcances de este libro.

— Como se explicó anteriormente, cada una de las ecuaciones cartesianas de una curva corresponden a las de una superficie, que al cortarse forman una curva. En el ejercicio 4.4, la segunda ecuación es la de un plano, así que por este hecho, la curva es plana, siempre que el plano corte a la superficie representada por la primera ecuación y ese es el caso.

En el mismo ejercicio, la curva estudiada es una circunferencia. En la figura 4.1 puede observarse una esfera con centro en el origen y radio dos. Esta esfera está representada por la primera ecuación de la curva. La segunda ecuación es la de un plano perpendicular al plano YZ. En la misma figura 4.1 se ilustra la intersección entre la esfera y el plano, que es la circunferencia.

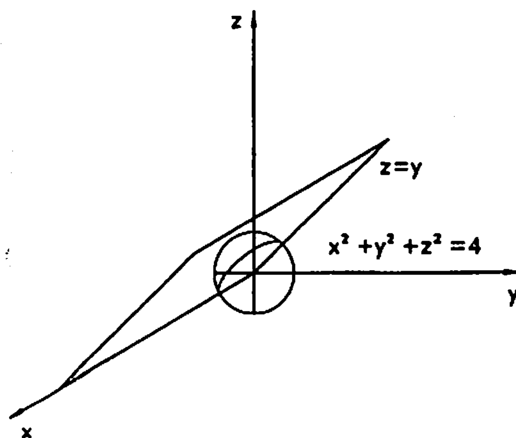


FIGURA 4.1

EJERCICIO 4.5. Determinar si la curva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=-\frac{3}{4}z \end{cases}$$

es simétrica con respecto al:

a) Plano XY

b) Origen

SOLUCIÓN:

a) Para determinar si la curva es simétrica con respecto al plano XY recuérdese que un punto $P(x,y,z)$ tiene por simétrico con respecto a dicho plano a $Q(x,,-y,z)$; entonces, si se cambia y por $-y$ en ambas ecuaciones y éstas no se alteran, la curva es simétrica y no lo es si alguna de ellas o ambas se alteran.

   Para nuestro caso, al cambiar esta variable en la primera ecuación queda $x^2+(-y)^2+z^2=1$ que resulta $x^2+y^2+z^2=1$; por lo que no se alteró.

   Ahora, en la segunda ecuación $-y=-\frac{3}{4}z$ la cual es diferente de la original, por lo que la curva no es simétrica con respecto al plano XY.

b) Para determinar la simetría con respecto al origen, se cambia x por $-x$, y por $-y$ y z por $-z$, y si las ecuaciones no se alteran; entonces existe simetría con respecto a dicho punto.

4.3 REPRESENTACIÓN VECTORIAL Y PARAMÉTRICA

DEFINICIÓN 4.2. *Una ecuación vectorial de una curva es una regla matemática que indica el desplazamiento de un vector de posición para que su extremo barra la curva en toda su longitud.*

DEFINICIÓN 4.3. *Se llama parámetro a una variable que permanece constante durante un proceso matemático. Es frecuente que a un parámetro simplemente se le considere una variable más; sin embargo, en las representaciones cartesianas de los ejemplos anteriores, las variables son x, y y z, pudiendo describirse tales curvas relacionando a dichas variables con un parámetro, como se explicará en lo que sigue.*

Para representar vectorialmente a una curva basta con la utilización de un parámetro, mientras que para la representación de una superficie son necesarios dos. Esto puede comprenderse

fácilmente si se observa que la expresión cartesiana de una curva está constituida por dos ecuaciones y para conocer un punto de la curva, bastará con elegir un valor de cualquiera de las tres variables, ya que quedará un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, las otras dos variables. Si el sistema es compatible determinado, esto significa que para el valor elegido sí existe un punto de la curva, si el sistema resulta compatible indeterminado, esto indica que hay infinidad de puntos de la curva que tienen la coordenada elegida y si el sistema es incompatible, la curva no tiene puntos con el valor escogido de la coordenada.

Por otra parte, se ha dicho que una superficie requiere de una sola ecuación cartesiana para su representación y el hecho de que se necesiten dos parámetros para su ecuación vectorial también puede comprenderse con un razonamiento análogo al anterior: al tenerse una ecuación cartesiana, se requiere elegir dos de las variables para fijar un punto de la superficie. Podría decirse que para las curvas se tiene *un grado de libertad,* mientras que para las superficies, *dos.*

La forma simbólica en que se representa a las curvas vectorialmente es $\bar{r} = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ y su representación paramétrica resulta inmediatamente de aquí:

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Vale la pena considerar lo siguiente:

— El nombre del parámetro carece de importancia. Es frecuente usar la letra t para representar dicho parámetro, pero esto es porque en muchas aplicaciones, sobre todo en Física, el parámetro suele ser el tiempo.

— En ocasiones se emplea θ para denotar el parámetro y, como se dijo carece de importancia este hecho, sólo que no debe confundirse con el ángulo que se utiliza en la representación polar de las curvas.

— Las variables x, y y z están relacionadas con el parámetro, pero no necesariamente de manera funcional. Es decir, la relación establecida entre x y el parámetro no es necesariamente una función, como las que se definen en un curso de cálculo, y así las otras dos, aunque en la práctica sí resulta muy conveniente que la elección del parámetro sea tal que las tres relaciones sean funciones.

En las aplicaciones de la Geometría Analítica, una buena elección del parámetro puede tener como consecuencia que algunos problemas de solución muy complicada, o hasta sin posibilidad

de solución, si se manejan en forma cartesiana, puedan trabajarse vectorial o paramétricamente. A esta elección del parámetro suele llamarse, abusando del lenguaje: *parametrización*.

No existe un método general que permita parametrizar las curvas. Puede recurrirse a la Geometría, en otras ocasiones al Álgebra, a la Trigonometría, pero siempre al ingenio.

En lo que sigue se mostrará con ejemplos la parametrización de ciertas curvas, haciendo énfasis en algunas conocidas.

EJERCICIO 4.6. Sea la circunferencia

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$$

Representarla vectorial y paramétricamente.

SOLUCIÓN:
Antes de intentar su representación vectorial y paramétrica, conviene analizar la situación. La curva, según el enunciado es una circunferencia. Si se observa la primera de las ecuaciones, se ve que corresponde a lo que en el bachillerato se dijo es una circunferencia con centro en el origen y radio igual a cuatro; por otra parte, la segunda ecuación es la del plano xy esto se debe a que, como se dijo, cada una de las ecuaciones de la curva representa una superficie, en este caso, la primera es la de un cilindro circular recto con eje coincidente con el eje z y radio cuatro, que al cortarse con el plano xy forma la circunferencia.

Como un primer intento para llegar a las formas vectorial y paramétrica de las ecuaciones de la circunferencia, puede considerarse como parámetro a la variable x: $x = t$, de manera que al despejar de la primera ecuación a y:

$$y = \pm\sqrt{16 - t^2}$$

entonces, la ecuación vectorial resulta:

$$\bar{r} = [t, \pm\sqrt{16 - t^2}, 0]; \quad -4 \le t \le 4$$

y las correspondientes ecuaciones paramétricas son:

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{16 - t^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

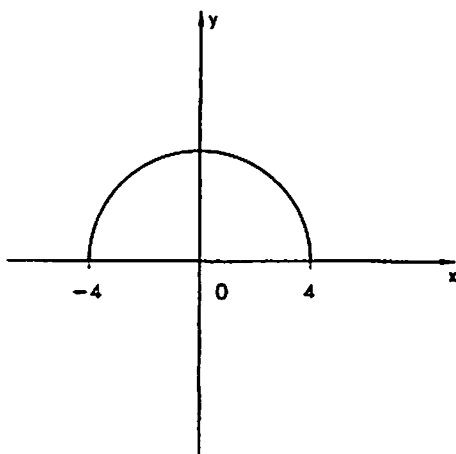
La parametrización anterior no es muy conveniente, en virtud de que la segunda de las ecuaciones paramétricas no es una función. De manera que si se toma sólo el signo positivo se describe a la semicircunferencia superior, aquella que tiene ordenadas positivas (véase figura 4.2a), mientras que al usar el signo negativo, se tiene la semicircunferencia inferior (véase figura 4.2b); esto significa que se requerirían dos ecuaciones vectoriales para una sola curva y seis ecuaciones paramétricas:

$$\bar{r}_1=[t,\sqrt{16-t^2},0]$$

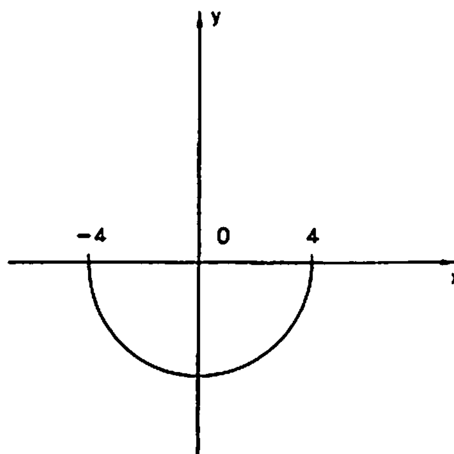
$$;-4\leq t\leq 4 \quad \text{y}$$

$$\bar{r}_2=[t,-\sqrt{16-t^2},0]$$

$$C_1:\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{16-t^2} \\ z=0 \end{cases} \qquad C_2:\begin{cases} x=t \\ y=-\sqrt{16-t^2};-4\leq t\leq 4 \\ z=0 \end{cases}$$



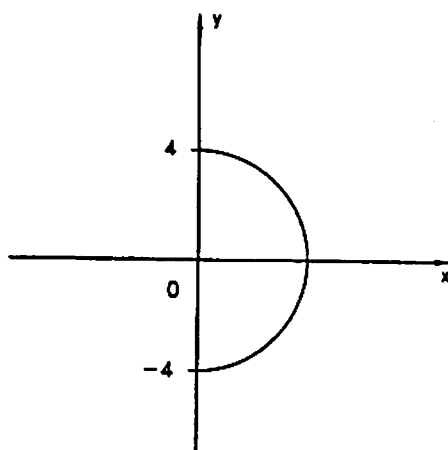
a)



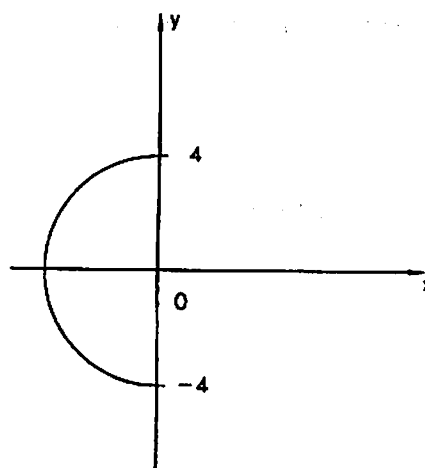
b)

FIGURA 4.2

Si se eligiese ahora como parámetro a la variable y no ayudaría mucho, pues se tendría un problema similar, ya que si $y = m$, al despejar a x de la primera ecuación cartesiana se tendría: $x = \pm\sqrt{16-m^2}$; $-4 \leq m \leq 4$ y el doble signo provocaría una situación similar a la anterior, sólo que ahora se describiría la semicircunferencia derecha con el signo positivo (figura 4.3a) y la izquierda, con el negativo (figura 4.3b).



a)



b)

FIGURA 4.3

Por otra parte, si se elige como parámetro $x^2 = n$, la situación se complica, pues $x = \pm\sqrt{n}$ y para cada uno de los signos se tienen ahora dos valores de y, esto lleva a que se requieren cuatro ecuaciones vectoriales, una para cada cuarto de circunferencia.

Para lograr una mejor parametrización, es más conveniente recurrir indirectamente a la trigonometría. La primera ecuación cartesiana puede escribirse:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Si ahora se establece una analogía entre la ecuación anterior y la identidad $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; entonces, al hacer

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{x^2}{16}; \qquad \cos^2 \alpha = \frac{y^2}{16}$$

ahora se trabajará con la primera de estas expresiones, ya que las conclusiones a las que se lleguen serán similares que si se trabajara con la segunda.

$$x^2 = 16 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$x = \pm 4 \operatorname{sen} \alpha$$

Al parecer no se ha ganado nada pues también al extraer raíz cuadrada ha surgido el doble signo; sin embargo, si se escoge el intervalo de variación del parámetro, de tal manera que queden representados

todos los puntos de la curva, puede eliminarse este problema. La ecuación vectorial queda:

$$\bar{r} = 4 \text{ sen } \alpha\, i + 4 \cos \alpha\, j; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

y las ecuaciones paramétricas:

$$C: \begin{cases} x = 4 \text{ sen } \alpha \\ y = 4 \cos \alpha; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

La parametrización anterior es mucho más adecuada que las otras; sin embargo, es posible aún llegar a una mejor, al menos es la más frecuentemente usada en la práctica. Ésta se tiene si en lugar de establecer la analogía con $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ se realiza con $\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$. El cambio de nombre del parámetro se ha hecho a propósito, pues geométricamente son dos ángulos diferentes, como se describirá después, mientras que el cambio de posición de los sumandos, aunque algebraicamente se sabe que es válido, permite entender de manera más fácil que ahora la analogía es $x^2 = 4 \cos^2 \theta$; $y^2 = 4 \text{ sen}^2 \theta$.

Si se continúa con el trabajo algebraico se llega a la ecuación vectorial:

$$r = 4 \cos \theta\, i + 4 \text{ sen } \theta\, j; \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

y a las ecuaciones paramétricas:

$$C: \begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 4 \text{ sen } \theta; \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

La explicación de por qué es más ventajosa la última parametrización radica en el hecho de que el parámetro α elegido en la penúltima de las parametrizaciones es el ángulo medido a partir del eje de las ordenadas y hasta el radio vector que une al origen con el punto en estudio. Por ejemplo, si $\alpha = 0$ entonces $x = 0$; $y = 4$; por otra parte, si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ entonces $x = 2$; $y = 2\sqrt{3}$. Los dos puntos obtenidos están representados en la figura 4.4 como los puntos A y B, respectivamente.

Por otra parte, en la última de las parametrizaciones, el ángulo θ corresponde al que se mide desde el eje de las abscisas hasta el radio vector del punto en estudio. Como ejemplo, considérense ahora los puntos C y D de la figura 4.5, obtenidos ahora si θ entonces $x = 4$, $y = 0$ para el punto C; y para D,

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad x = 2, \quad y = 2\sqrt{3}.$$

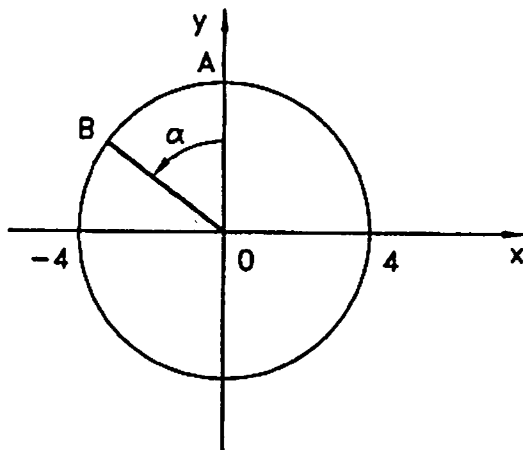


FIGURA 4.4

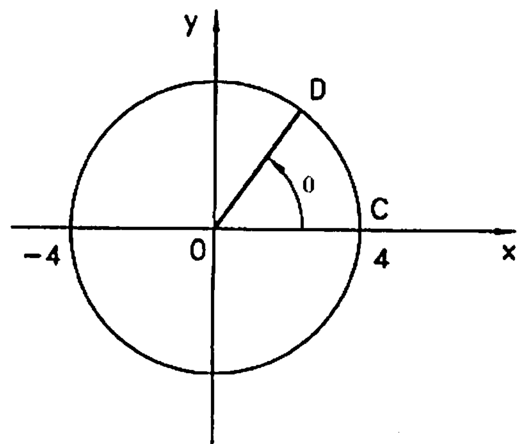


FIGURA 4.5

En los dos casos el sentido de medición es el directo; es decir, el contrario al de las manecillas de un reloj. Posteriormente, en los cursos de cálculo, se estudiará que la opción del ángulo θ es más adecuada.

Si se hubiera elegido alguno(s) de los signos negativos en cualquiera de las dos últimas parametrizaciones, se hubiera modificado o el punto de inicio del recorrido, o el sentido de medición del ángulo. Se deja al lector el análisis de estas modificaciones.

EJERCICIO 4.7. Determinar unas ecuaciones paramétricas para la elipse de ecuaciones cartesianas (figura 4.6).

$$E: \begin{cases} \dfrac{(x-6)^2}{4} + (z-7)^2 = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

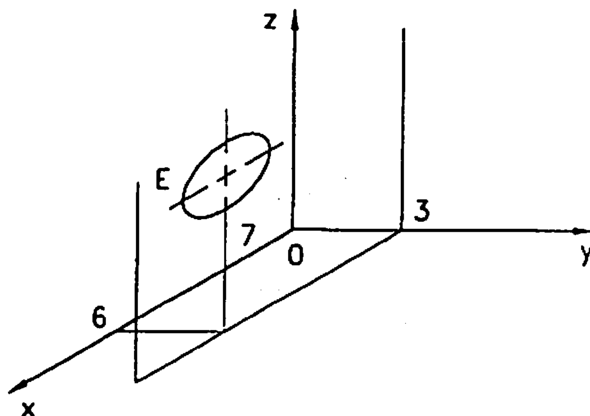


FIGURA 4.6

SOLUCIÓN:

Para este caso nuevamente conviene usar la misma identidad trigonométrica y establecer la igualdad:

$$\frac{(x-6)^2}{4} = \cos^2\theta;$$

despejando:

$$x = 6 + 2\cos\theta$$

Por otra parte,

$$(z-7)^2 = \operatorname{sen}^2\theta$$

que conduce a

$$z = 7 + \operatorname{sen}\theta;$$

finalmente, las ecuaciones paramétricas resultantes son

$$E: \begin{cases} x = 6 + 2\cos\theta \\ y = 3 \\ z = 7 + \operatorname{sen}\theta \end{cases} ; \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

EJERCICIO 4.8. Determinar una ecuación vectorial para la parábola de la figura 4.7 de ecuaciones cartesianas

$$P: \begin{cases} (x-3)^2 = 2(y-4) \\ z = 5 \end{cases}$$

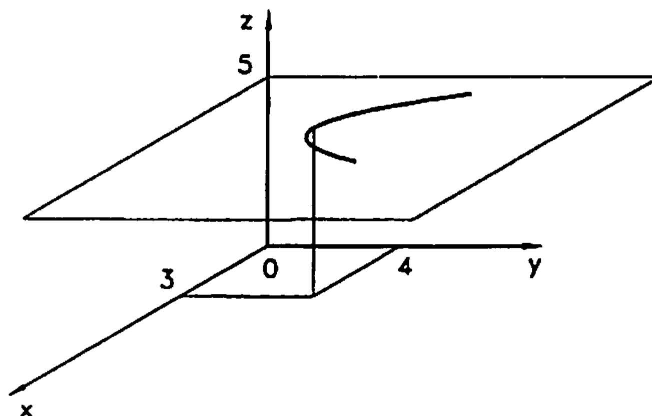


FIGURA 4.7

SOLUCIÓN:

En este caso, aunque también podría emplearse alguna identidad trigonométrica, resulta más adecuado tomar como parámetro $x = \tau$; al sustituir en la primera ecuación de P y despejar:

$$y = \frac{(\tau-3)^2}{2} + 4.$$

Por lo que la ecuación vectorial es $\bar{p} = \tau i + \left[\frac{(\tau-3)^2}{2} + 4\right] j + 5k; \quad \tau \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 4.9. Sea la hipérbola de ecuaciones cartesianas

$$H: \begin{cases} \frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{5} = 1 \\ x = 0 \end{cases} ;$$

determinar unas ecuaciones paramétricas.

SOLUCIÓN:

En primer lugar, la hipérbola en cuestión está alojada en el plano YZ (véase figura 4.8). Ahora, para lograr una buena parametrización, conviene de nuevo emplear una identidad trigonométrica, pero como no se tiene una suma de cuadrados igualada a la unidad, lo más aconsejable es la utilización de alguna identidad en la que intervenga una diferencia de cuadrados igualada a la unidad, y ésta puede ser:

$$\sec^2 \beta - \tan^2 \beta = 1$$

Ahora, como en ejercicios anteriores, puede establecerse una analogía, resultando:

$$\frac{(y-3)^2}{4} = \sec^2 \beta; \qquad \frac{(z-1)^2}{5} = \tan^2 \beta.$$

Siguiendo el camino algebraico ya conocido, las ecuaciones paramétricas de la hipérbola quedan:

$$H: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 2 \sec \beta \qquad 0 \leq \beta < 2\pi \\ z = 1 + \sqrt{5} \tan \beta \end{cases}$$

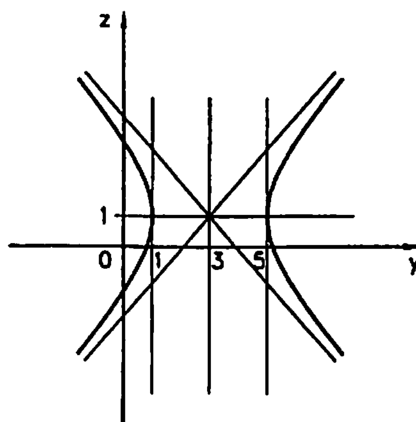


FIGURA 4.8

En el ejercicio anterior, al fijar el intervalo de variación del parámetro como $0 \leq \beta < 2\pi$, se asegura que todos los puntos de la hipérbola están descritos por las ecuaciones paramétricas obtenidas; sin embargo, existen valores del parámetro para los cuales no están definidas ni la secante ni la tangente, esto es cuando $\cos\beta = 0$; $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$. Lo cual significa que para estos valores del parámetro no existen puntos de la hipérbola. De aquí es conveniente dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.4. *Sean las ecuaciones paramétricas de una curva*

$$C: \begin{cases} x = f(t) & \quad \ldots(1) \\ y = g(t) & \quad \ldots(2) \\ z = h(t) & \quad \ldots(3) \end{cases}$$

Se llama intervalo paramétrico I_p al conjunto de valores de $t \in \mathbb{R}$ para los cuales x, y, $z \in \mathbb{R}$, simultáneamente en las ecuaciones (1), (2) y (3).

La definición anterior es equivalente a la siguiente, pero que está escrita en términos de cálculo.

DEFINICIÓN 4.5. *Se llama intervalo paramétrico I_p a la intersección de los dominios de las relaciones (1), (2) y (3).*

EJERCICIO 4.10. Sea la curva

$$T: \left\{ \bar{r} = \left[-\sqrt{5-u}\,,\ \frac{1}{\sqrt{25-u^2}}\,, (5u+1) \right] \right\}.$$

Determinar:

a) el intervalo paramétrico;

b) los valores que pueden tomar las abscisas, las ordenadas y las cotas de los puntos de la curva.

SOLUCIÓN:

La ecuación vectorial de la curva conduce de inmediato a las ecuaciones paramétricas

$$T: \begin{cases} x = -\sqrt{5-u} & \ldots(1) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{25-u^2}} & \ldots(2) \\ z = 5u + 1 & \ldots(3) \end{cases}$$

a) Para determinar el intervalo paramétrico, primero se obtendrá el dominio de la relación $x = -\sqrt{5-u}$. Para ello debe resolverse la desigualdad $5 - u \geq 0$. Al aplicar algunas propiedades de las desigualdades $u \leq 5$, por lo que el dominio de la expresión es $D_x = (-\infty, 5]$.

Por otra parte, para el dominio de la segunda expresión

$$y = \frac{1}{\sqrt{25 - u^2}}$$

debe trabajarse ahora con la desigualdad $25 - u^2 > 0$, en la cual no se ha considerado la igualdad con cero pues al estar el radical en el denominador, el cociente no existiría si dicho denominador fuera nulo. Es importante enfatizar que el cociente *no se indetermina* como dicen equivocadamente algunas personas. Para eliminar todo tipo de dudas, se sugiere que se estudien las formas indeterminadas en cualquier libro de cálculo.

Ahora bien, la desigualdad puede escribirse $(5 + u)(5 - u) > 0$.

Para que el producto sea positivo los factores deben tener el mismo signo, de manera que se presentan dos casos.

Primer caso: $5 + u > 0$ y $5 - u > 0$, es decir $u > -5$ y $u < 5$ en donde la conjunción y indica que las dos desigualdades deben cumplirse simultáneamente, o sea, se trata de la intersección de dos conjuntos y esta intersección puede escribirse $-5 < u < 5$.

Segundo caso: $5 + u < 0$ y $5 - u < 0$, que conduce a $u < -5$ y $u > 5$.

Como la intersección entre estos dos conjuntos es el conjunto vacío, y el dominio de la segunda expresión está dado por la solución del caso uno o la del caso dos y ahora la **o** significa unión entre conjuntos, se tiene que el dominio de la función es $D_y = (-5, 5)$.

Ahora bien, la tercera de las ecuaciones paramétricas es $z = 5u + 1$ y en ella puede observarse que para que exista z, el parámetro u puede tomar cualquier valor real, de manera que $D_z = (-\infty,\infty)$.

Finalmente, el intervalo paramétrico es

$$I_p = D_x \cap D_y \cap D_z$$

por lo que

$$I_p = (-5,5).$$

b) Para obtener ahora los posibles valores de las coordenadas de los puntos de la curva, el camino a seguir no es exactamente la determinación del recorrido de las tres funciones paramétricas, sino un subconjunto de cada uno de estos recorridos, aquel que corresponde a los valores del intervalo paramétrico. En primer lugar, para las abscisas debe considerarse qué valores puede tomar x si el parámetro toma sólo los valores de I_p.

Como los valores de las abscisas están dados por la ecuación

$$x=-\sqrt{5-u} \qquad \ldots(1)$$

y el parámetro puede tomar valores en $I_p=(-5,5)$; lo que puede hacerse es elevar al cuadrado la ecuación (1), $x^2=5-u$ que representa media parábola, por el signo negativo de la ecuación original. Para llevarla a su forma ordinaria, puede escribirse:

$$x^2 = -(u - 5).$$

La representación gráfica de la semiparábola puede verse en la figura 4.9.

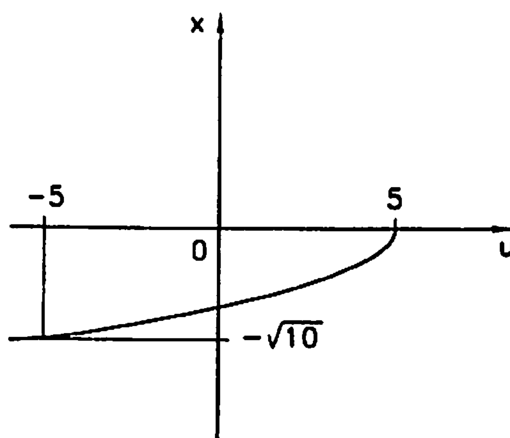


FIGURA 4.9

Entonces, los valores posibles de las abscisas están en $(-\sqrt{10},0)$.

Ahora para las ordenadas se trabajará con la ecuación (2):

$$y = \frac{1}{\sqrt{25-u^2}} \qquad ...(2)$$

Esta ecuación no corresponde a ninguna de las curvas cónicas estudiadas en el bachillerato; por lo que no es posible trabajarla como en el caso de las abscisas.

Lo que puede hacerse es analizar la ecuación y percatarse que se trata de un cociente de numerador constante, así que la variación del cociente dependerá de la variación del denominador. Si el denominador aumenta, el cociente disminuye y viceversa. En este caso, el denominador es la raíz de una diferencia, a 25 se le va a restar una variable. Ante esto, el valor menor del cociente lo toma cuando a 25 se le resta cero, de donde si $u = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$.

Por otra parte, si $u \to -5 \Rightarrow y \to +\infty$ y si $u \to 5 \Rightarrow y \to +\infty$, esto lleva a que las ordenadas varían en el intervalo $(\frac{1}{5},+\infty)$.

Para

$$z = 5u + 1 \qquad ...(3)$$

que es la ecuación de una recta, bastará con sustituir los valores extremos del intervalo paramétrico, por lo que las cotas varían en $(-24,26)$.

EJERCICIO 4.11. Sea la curva

$$F: \begin{cases} x = 4 & ...(1) \\ y = \cos 2\theta & ...(2); \qquad 0 \le \theta \le \pi. \\ z = \operatorname{sen} \theta & ...(3) \end{cases}$$

Determinar las ecuaciones cartesianas de la curva e identificarla.

SOLUCIÓN:

La ecuación (1) indica que se trata de una curva alojada en un plano paralelo al YZ; por otra parte, sin poder establecer una regla general, cuando se trata de eliminar un parámetro de dos ecuaciones que contienen funciones trigonométricas, generalmente conviene emplear algunas identidades. Para este ejercicio, la ecuación (2) puede escribirse

$$y = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta, \qquad ...(4)$$

De la ecuación (3):

$$\text{sen}^2\,\theta = z^2 \qquad \ldots(5)$$

(5) en (4):

$$y = \cos^2\theta - z^2,$$

de donde:

$$\cos^2\theta = y + z^2 \qquad \ldots(6)$$

ahora, como

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$

sustituyendo (5) y (6) en esta identidad:

$$z^2 + y + z^2 = 1$$

reduciendo términos semejantes y llevando la ecuación a su forma ordinaria:

$$z^2 = -\frac{1}{2}\,(y-1) \qquad \ldots(7)$$

que podría pensarse que representa una parábola. Sin embargo, obsérvese que el parámetro varía en el intervalo $[0,\pi]$, lo que lleva a que las cotas sólo pueden tomar valores positivos, que son los únicos que puede tomar la función seno en los dos primeros cuadrantes; y la ordenada puede tomar valores positivos y negativos, pues está igualada con el coseno del ángulo doble, sólo que dichos valores estarán comprendidos en $[-1,1]$. Esto quiere decir que las ecuaciones representan el segmento de parábola mostrado en la figura 4.10, pero *recorrido* dos veces, uno empezando en el punto A y siguiendo el sentido directo y el otro iniciando en el punto B, ahora con el sentido inverso.

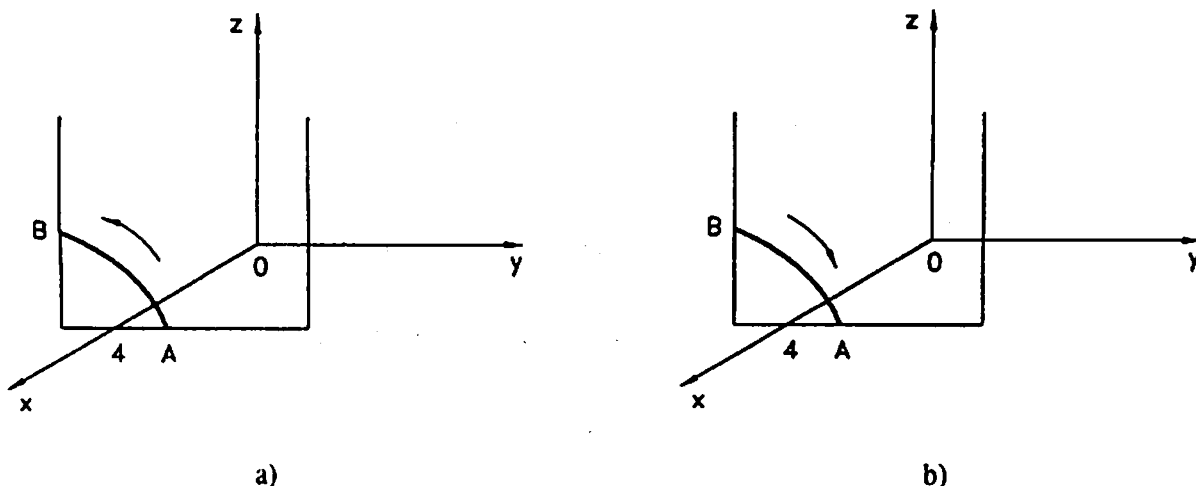


FIGURA 4.10

Debe tenerse en cuenta que si se necesitara valuar, por ejemplo, la longitud del segmento de parábola, se podría utilizar una integral en cálculo, pero si se integrara con los extremos indicados, se valuaría el doble de la longitud ya que la curva fue recorrida dos veces.

Las ecuaciones cartesianas del segmento de parábola son

$$F: \begin{cases} z^2 = -\frac{1}{2}(y - 1) \\ \\ x = 4 \end{cases} \qquad -1 \leq y \leq 1;\ z > 0$$

pero cada punto de la curva está representado dos veces por las ecuaciones paramétricas. Finalmente, si se quisiera emplear una ecuación vectorial que represente a la curva una sola vez, basta con restringir los valores del parámetro, quedando

$$\bar{f} = 4i + (\cos 2\theta)\, j + (\text{sen}\ \theta)\, k; \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

si el sentido de recorrido elegido es el directo (figura 4.10a).

EJERCICIO 4.12. Un jugador de béisbol conecta un batazo hacia el jardín derecho del parque. La trayectoria de la pelota tiene por ecuaciones

$$P: \begin{cases} x = 10t & \ldots(1) \\ y = 19t & \ldots(2) \\ z = 1.25 + 23t - 5t^2 & \ldots(3) \end{cases}$$

donde x, y y z están medidas en metros si t se mide en segundos.

Si la cerca del parque se encuentra a una distancia horizontal de 90 metros en la dirección del batazo y tiene una altura de 9 metros, ¿la pelota librará la cerca?

SOLUCIÓN:

Al observar las ecuaciones de la curva que sigue la pelota se deduce que las ecuaciones (1) y (2) señalan que el movimiento de la pelota proyectado al plano horizontal es una línea recta; mientras que la ecuación (3) indica que el movimiento vertical de la pelota es parabólico. Véase figuras 4.11a y b.

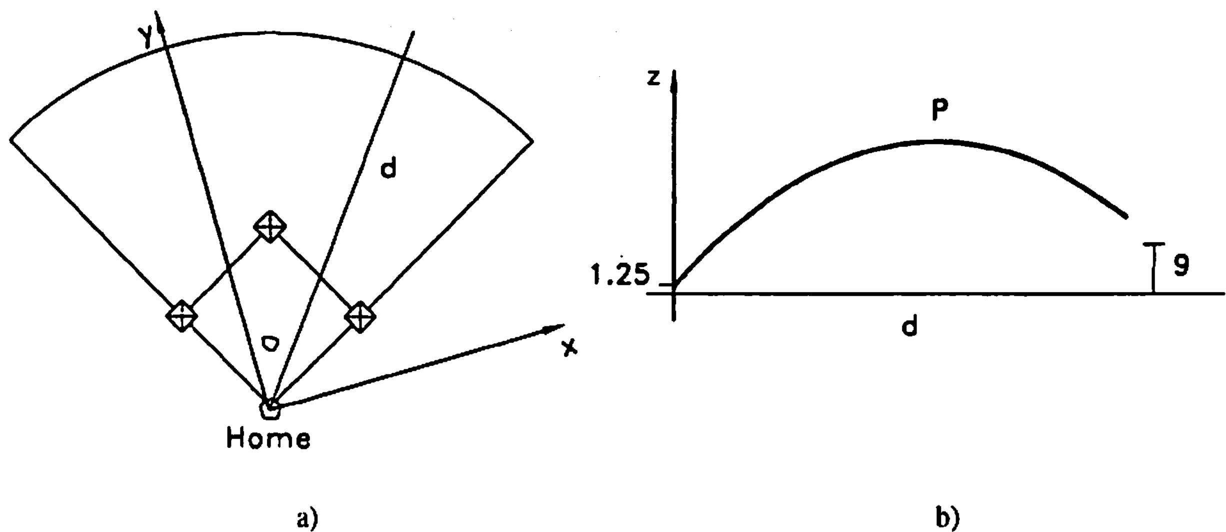


FIGURA 4.11

Ahora, si se sustituye el valor de $z = 9$ en la ecuación (3) para calcular el tiempo en el que la pelota alcanza ese nivel:

$$9 = 1.25 + 23t - 5t^2$$

que queda, después de reducir términos semejantes y ordenar:

$$5t^2 - 23t + 7.75 \doteq 0$$

ecuación de segundo grado que al resolverla da como valores de t:

$$t_1 = 0.37s; \qquad t_2 = 4.23s$$

de los tiempos calculados, el que interesa es el segundo, ya que es cuando la pelota cae. Para este tiempo, los valores de x y y son:

$$x = 10(4.23) = 42.3 \text{ m}$$

$$y = 19(4.23) = 80.37 \text{ m}$$

Por otra parte, la posición relativa de los ejes coordenados x, y carece de importancia, pues de la figura 4.11a puede verse que la distancia horizontal recorrida por la pelota, en cualquier instante, está dada por:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2};$$

en donde se ha prescindido de la ambigüedad del signo porque, en este caso, la distancia negativa no tiene sentido físico. De manera que, al sustituir los valores de x y y calculados:

$$d = \sqrt{(42.3)^2 + (80.37)^2} = 90.82 \text{ m}$$

lo que significa que la pelota sí libra la cerca.

4.4 REPRESENTACIÓN POLAR

Como ya se mencionó, la Geometría Analítica trata de resolver dos situaciones, y una de ellas se tiene cuando se conoce la representación analítica de una curva y se requiere determinar sus características y, eventualmente, identificarla.

Cuando se cuenta con la representación polar de una curva y es necesario conocer algunas de sus características, comúnmente se emplea un método llamado *discusión de la ecuación polar de una curva.* Es muy importante hacer las siguientes consideraciones:

a) Debe enfatizarse en que el argumento de un punto, entendiendo por esto a la segunda coordenada polar, suele representarse con θ pero no debe confundirse con el parámetro usado en una representación vectorial o paramétrica de una curva, aunque se hubiera elegido la misma letra como parámetro. Es relativamente fácil distinguir una representación de otra. En una representación vectorial, como su nombre lo indica, se tendrá un *vector* con sus tres componentes; en una representación paramétrica, las variables x, y, z en términos de un parámetro que podría llamarse θ; y en una representación polar estarán relacionadas implícita o explícitamente las variables r, θ.

b) En lo que sigue se usarán radianes para medir los argumentos de todos los puntos en las ecuaciones que se estudien. Si en una ecuación en coordenadas polares intervienen únicamente relaciones trigonométricas en el tratamiento del argumento, el valuarlos en grados o radianes no tiene importancia, siempre y cuando se tenga congruencia; por ejemplo, si se tiene la ecuación $r = \text{sen } \theta - 4 \cos 3\theta$, no importa si el argumento se trabaja en grados o en radianes, lo único que debe cuidarse es que si se desea calcular el módulo de un punto $\theta = 1°$, empleando una calculadora, ésta debe tener activada la opción DEG, ya que si tiene activada la opción RAD, la calculadora valuará el módulo cuando $\theta = 1$ *radián*; y si la calculadora tiene la opción GRAD, entonces la calculadora trabajará con grados centesimales. Ahora bien, si la ecuación en estudio es $r^2 \text{ sen } \theta + r \cos \theta = \theta$, donde θ interviene sin ser argumento de alguna función trigonométrica, debe trabajarse exclusivamente en radianes.

c) La discusión de la ecuación polar de una curva es un método y como todos los métodos no es más que una serie de instrucciones que tienen un objetivo. En este caso el objetivo es la determinación de algunas características de una curva de la cual se conoce su ecuación polar. ¿Cuál o cuáles características? La respuesta depende del problema que se trate. Podría ser que con sólo determinar si la curva es cerrada baste. O bien, si se identificara la curva podría ser suficiente. Esto es, el objetivo no es la aplicación completa del método. Es más, el conocimiento de algunas características podría ser más útil y suficiente para identificar la curva, si eso fuera lo que se quisiera.

   Por otra parte, con el desarrollo tan vertiginoso y sorprendente de los equipos y técnicas de computación puede parecer inútil el método en cuestión; sin embargo, la teoría es insustituible. A lo largo de los párrafos siguientes se podrá ver que el conocimiento sólido de la teoría permitirá comprender algunos resultados aparentemente contradictorios o erróneos.

d) Las curvas expresadas en forma polar siempre son planas. Recuérdese que las coordenadas polares se refieren siempre al radio vector y al ángulo entre el eje polar y el radio vector. Si se tratara de estudiar una curva alabeada y se necesitara algo similar a las coordenadas polares podrían emplearse las cilíndricas. Además, por ello se habla de *la ecuación polar*, así en singular, puesto que se considera que la otra ecuación es la del plano polar; por ejemplo, $z = 0$.

e) Recuérdese que un punto $P(r,\theta)$ puede estar representado por una infinidad de parejas de coordenadas polares:

$P(r,\theta \pm 2n\pi)$;	$n \in \mathbb{N}$.	Si se hace variar el argumento.
$P(-r, \theta \pm (2n-1)\pi)$;	$n \in \mathbb{N}$.	Si el módulo se acepta negativo.

Esta diversidad de representaciones polares de un punto conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.6. *Se llaman ecuaciones polares equivalentes aquellas que representan al mismo lugar geométrico.*

La equivalencia entre dos ecuaciones polares puede ser evidente si ésta es algebraica o trigonométrica. Es decir, si una ecuación puede obtenerse de otra con efectuar una simplificación algebraica o trigonométrica, es natural que dichas ecuaciones representen al mismo lugar geométrico; por ejemplo, las ecuaciones

$$2r = 4\cos\theta \qquad \ldots(1)$$

y

$$r = 2 \cos \theta \qquad \ldots(2)$$

evidentemente representan al mismo lugar geométrico, figura 4.12, puesto que la ecuación (2) es la misma que la ecuación (1) después de haber multiplicado ambos miembros por el escalar 1/2.

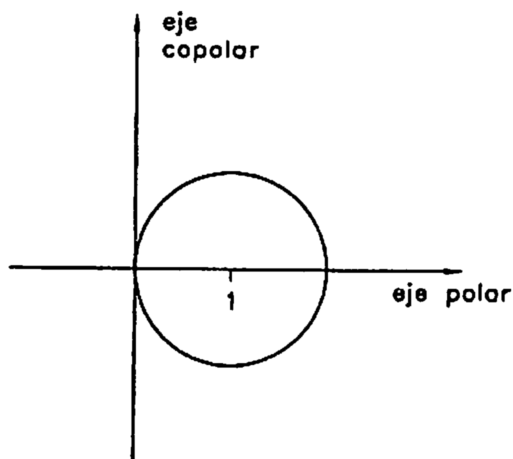


FIGURA 4.12

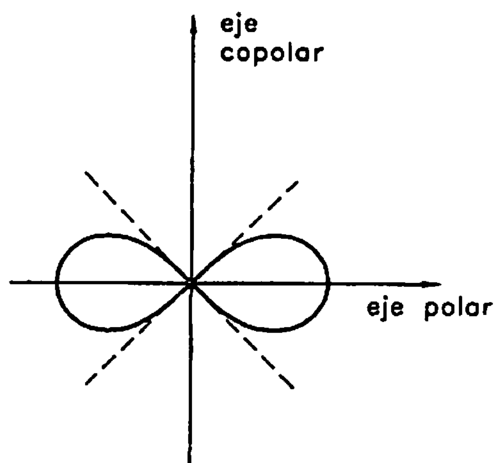


FIGURA 4.13

Por otra parte, las ecuaciones

$$r^2 = 4 (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \qquad \ldots(3)$$

y

$$r^2 = 4 \cos 2\theta \qquad \ldots(4)$$

también son equivalentes, esto es fácil de constatar pues las ecuaciones (4) y (3) son la misma si se considera la identidad $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$. La representación geométrica de la curva está en la figura 4.13.

La equivalencia entre ecuaciones polares puede ser más difícil de determinar cuando no es algebraica ni trigonométrica; es decir, cuando se debe a las diferentes posibilidades de representación de un punto en ese tipo de coordenadas. Para investigar la existencia de la equivalencia, considérese lo siguiente:

Sean las ecuaciones $r = f_1(\theta)$ ...(a); $r = f_2(\theta)$ ...(b) donde la letra f no representa necesariamente una función. Las ecuaciones (a) y (b) son equivalentes si las coordenadas de un

punto $P(r,\theta)$ se sustituyen en cualquiera de las dos ecuaciones por $P(r, \theta \pm 2n\,\pi)$ ó $P(-r, \theta \pm (2n - 1)\,\pi)$; $n \in \mathbb{N}$ y se llega a la otra ecuación.

EJERCICIO 4.13. Determinar si las ecuaciones

$$r = 3 \qquad \ldots(1)$$

y

$$r = -3 \qquad \ldots(2)$$

son equivalentes.

SOLUCIÓN:

Si se sustituyen en la ecuación (2) a las variables r y θ por r y $\theta \pm 2n\,\pi$, respectivamente; al no aparecer θ en la ecuación, ésta no se altera y no es posible obtener la ecuación (1). Pero, si ahora se sustituye (r, θ) por $(-r, \theta \pm (2n - 1)\,\pi)$, la ecuación queda:

$$-r = -3$$

que es algebraicamente equivalente a la ecuación (1), pues al multiplicar en ambos miembros por -1 se llega a dicha ecuación.

Las ecuaciones (1) y (2) representan la circunferencia con centro en el polo y radio igual a tres unidades, figura 4.14.

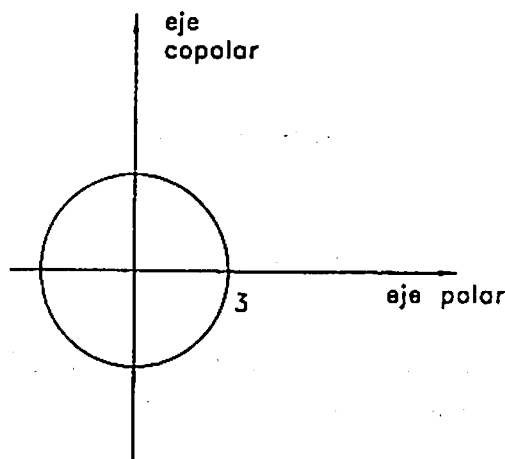


FIGURA 4.14

La diferencia entre las ecuaciones (1) y (2) radica en el hecho de que la ecuación (1) representa la circunferencia con el *recorrido* de un punto que gira alrededor del polo, iniciando su movimiento en el punto A y con sentido directo, figura 4.15a, mientras que la ecuación (2) representa la misma circunferencia, pero ahora con el movimiento de un punto que inicia su giro en el punto B y también con sentido directo, figura 4.15b.

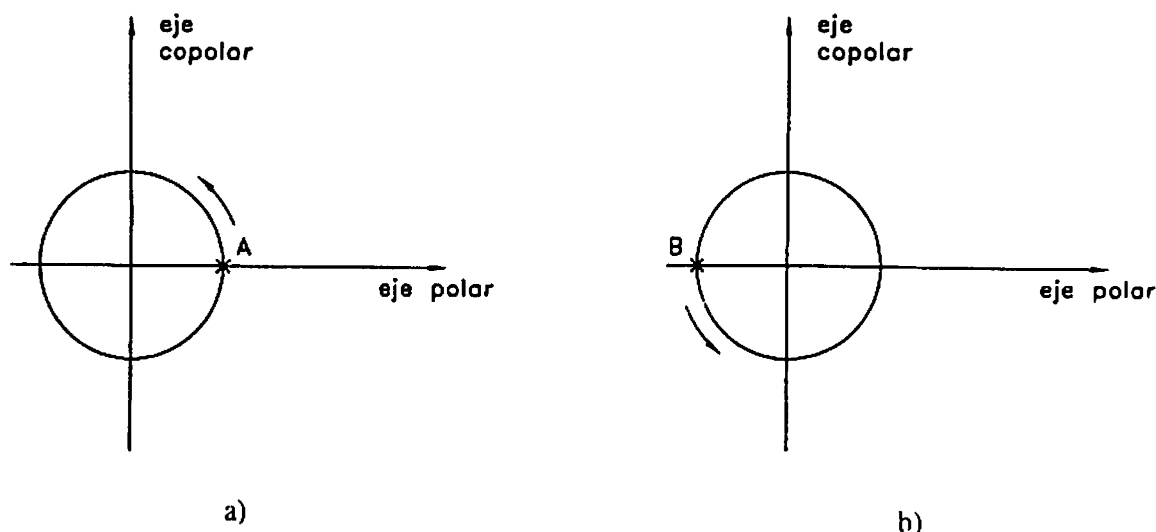


FIGURA 4.15

En el ejercicio anterior puede observarse que las ecuaciones (1) y (2) no son algebraicamente equivalentes, ya que no es posible transformar una en otra con alguna simplificación algebraica o trigonométrica; sin embargo, las ecuaciones son equivalentes por representar al mismo lugar geométrico.

EJERCICIO 4.14. Determinar si son equivalentes las ecuaciones

$$r = \theta + 2\pi \qquad \ldots(1)$$

$$r = -\theta + 3\pi \qquad \ldots(2)$$

SOLUCIÓN:

Evidentemente, no es posible transformar una de las ecuaciones en la otra con sólo efectuar una simplificación algebraica o trigonométrica; sin embargo, es posible que ambas ecuaciones representen el mismo lugar geométrico.

Observando las ecuaciones, debido a que en la ecuación (1) tanto r como θ tienen el mismo signo, mientras que en la ecuación (2) estas variables tienen signos diferentes, parece lógico pensar que si puede lograrse comprobar la equivalencia de las ecuaciones, esto pueda hacerse con la transformación de $P(r, \theta)$ por $P(-r, \theta \pm (2n - 1)\pi)$.

Al probar con el signo positivo, sustituyendo en (2):

$$-r = -[\theta + (2n - 1)\pi] + 3\pi,$$

si existe algún valor natural de n para el cual la ecuación resultante pueda convertirse en la ecuación (1), las dos ecuaciones originales son equivalentes, de manera que quitando paréntesis:

$$-r = -\theta - (2n-1)\pi + 3\pi$$

multiplicando ambos miembros por menos uno:

$$r = \theta + (2n - 1)\pi - 3\pi \qquad \ldots(3)$$

para que las ecuaciones (3) y (1) sean iguales se debe cumplir:

$$(2n-1)\pi - 3\pi = 2\pi$$

igualdad que se cumple si $n = 3$, y como n sí es natural se concluye que las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes.

EJERCICIO 4.15. Determinar si son equivalentes las ecuaciones

$$r = 4 \operatorname{sen} \theta \qquad \ldots(1)$$

$$r = -4 \operatorname{sen} \theta \qquad \ldots(2)$$

SOLUCIÓN:

Primeramente se observa que no es posible transformar una ecuación en otra por medio de una simplificación algebraica o por una identidad trigonométrica. Por otra parte, si se sustituyera $P(r, \theta)$ por $P(r, \theta \pm 2n\pi)$ no se lograría nada por los signos diferentes de la ecuación (2). Entonces, si se cambia $P(r, \theta)$ por $P(-r, \theta \pm (2n - 1)\pi)$ en la ecuación (1) se llega a:

$$-r = 4 \operatorname{sen} [\theta \pm (2n - 1)\pi]$$

que es igual a:

$$r = -4 \operatorname{sen} [\theta \pm (2n - 1)\pi] \qquad \ldots(3)$$

para que las ecuaciones (3) y (2) sean iguales debe cumplirse:

$$\theta = \theta \pm (2n - 1)\pi$$

y esto sólo es válido si:

$$n = \frac{1}{2}$$

y como el valor de n no es natural, se concluye que las dos ecuaciones originales no son equivalentes.

A continuación se describe el método de discusión de la ecuación polar de una curva. En cada una de las partes del método se ejemplifica lo que se expone con algunos ejercicios. Se sugiere al lector que cuando haya completado el estudio de dicho método, en los ejercicios del 4.16 al 4.25 practique determinando todas las características faltantes de la curva en cuestión, culminando con la identificación y la representación gráfica.

4.5 DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN POLAR DE UNA CURVA

Sea la curva

$$r = f(\theta) \qquad \ldots(A)$$

donde f no significa necesariamente que se tenga una relación funcional y en donde se ha despejado r por comodidad, pero no es imprescindible, aunque sí recomendable.

4.5.1 INTERSECCIONES

a) Con el eje polar

Como debe recordarse, cualquier punto que esté alojado en el eje polar debe tener como argumento $\theta = z\pi$, z entero. De manera que para investigar si la curva (A) es cortada por el eje polar, debe sustituirse θ por $z\theta$, z entero y obtener los valores correspondientes.

EJERCICIO **4.16.** Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva

$$r = \frac{4}{2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta} \qquad \ldots(1)$$

con el eje polar.

SOLUCIÓN:
Si $\theta = 0 \Rightarrow r = 2$; es decir, el punto es $P_1(2,0)$.

Por otra parte, para $\theta = \pi$; $r = -2$; sin embargo, no se trata de otro punto sino de otras coordenadas polares del mismo punto.

Como las funciones seno y coseno son periódicas y tienen el mismo período, si se dan valores a θ múltiplos de π siempre se obtendrá el mismo punto, por lo que la curva tiene un único punto de intersección con el eje polar.

b) Con el eje copolar

Se ha dicho y enfatizado que el eje copolar (o eje a 90°, como dicen algunos autores) no es esencial ni indispensable en las coordenadas polares; no obstante lo anterior, para el conocimiento de las características que conducen a un buen manejo de una curva o a su identificación, resulta conveniente trabajar con dicho eje.

Los puntos que pertenecen al eje copolar tienen como argumento $\theta = \pm\frac{(2n-1)\pi}{2}$; $n \in \mathbb{N}$ de manera que para conocer las coordenadas de los puntos de intersección de una curva con el eje copolar debe sustituirse el valor del argumento por $\pm\frac{(2n-1)\pi}{2}$. Y determinar el valor correspondiente de r.

EJERCICIO 4.17. Determinar las coordenadas de los puntos de intersección con el eje copolar de la curva

$$r = \frac{5}{\cos\theta} \qquad \ldots(1)$$

SOLUCIÓN:

En este caso, si en la ecuación (1) se sustituye θ por $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow r \nexists$.

Algo idéntico ocurre si $\theta = \frac{3\pi}{2}$, o en general, si $\theta = \pm\frac{(2n-1)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Esto significa que la curva no tiene puntos de intersección con el eje copolar.

4.5.2 SIMETRÍAS

a) Con respecto al eje polar

Si la curva representada por la ecuación polar (A) es simétrica con respecto al eje polar, esto significa que cualquier punto que pertenezca a ella tiene un punto simétrico con respecto a dicho eje que también pertenece a la curva. Para averiguar si esto ocurre, recuérdese que el punto simétrico de un punto $P(r, \theta)$ con respecto al eje polar tiene como coordenadas

polares $Q(r, -\theta)$ ó $Q(-r, \pi - \theta)$, entre muchas otras. Entonces, el criterio es que se presenta en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1. *La curva representada por* (A) *es simétrica con respecto al eje polar si al sustituir*:

i) θ *por* $-\theta$, *ó*
ii) r *por* $-r$, *y* θ *por* $\pi - \theta$,

la ecuación (A) *no cambia o se transforma en una ecuación equivalente.*

La demostración es evidente al tomarse en cuenta las diversas representaciones de un punto en forma polar y la definición de ecuaciones equivalentes.

EJERCICIO 4.18. Determinar si la curva

$$r = 2 \text{ sen } 2\theta \qquad \ldots(1)$$

es simétrica con respecto al eje polar.

SOLUCIÓN:
Si las coordenadas de un punto cualquiera de (1) $P(r, \theta)$ se reemplazan por $Q(r, -\theta)$, la ecuación se convierte en:

$$r = 2 \text{ sen } 2(-\theta),$$

y como:

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha,$$

entonces:

$$r = -2 \text{ sen } 2\theta \qquad \ldots(2)$$

Ahora debe investigarse si las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes. Si lo son, al sustituir en (2) $P(r, \theta)$ por $P(-r, \theta \pm (2n - 1)\pi)$, la ecuación queda:

$$-r = -2 \text{ sen } 2\,(\theta \pm (2n - 1)\pi),$$

que después de multiplicar ambos miembros por menos uno y de simplificar el argumento de la función seno:

$$r = 2 \text{ sen}[2\ \theta \pm 2(2n - 1)\pi];$$

ahora, ya que:

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cos\beta \pm \text{sen } \beta \cos \alpha,$$

$$r = 2[\text{sen } 2\theta \cos 2\ (2n - 1)\pi \pm \text{sen } 2\ (2n - 1)\pi \cos 2\theta]$$

y si $n = 1$, la ecuación se transforma en:

$$r = 2 \text{ sen } 2\theta.$$

que es idéntica a la ecuación (1), por lo que se concluye que la curva sí es simétrica con respecto al eje polar.

¿Qué hubiera pasado si el criterio aplicado hubiese sido el reemplazo de las coordenadas polares de un punto cualquiera de (1) por $P(-r, \pi - \theta)$?

La ecuación (1) se hubiera transformado en:

$$-r = 2 \text{ sen } 2(\pi - \theta)$$

que al desarrollar queda:

$$-r = 2[\text{sen } 2\pi \cos 2\theta - \text{sen } 2\theta \cos 2\pi]$$

pero, como $\text{sen } 2\pi = 0$ y $\cos 2\pi = 1$, entonces:

$$-r = -2 \text{ sen } 2\theta$$

finalmente:

$$r = 2 \text{ sen } 2\theta$$

que es la ecuación (1).

Obsérvese que en este caso no es necesario averiguar la equivalencia de las ecuaciones, pues se llega a una ecuación con equivalencia trigonométrica.

EJERCICIO 4.19. Determinar si la curva

$$r = 4 \text{ sen } \theta$$

es simétrica con respecto al eje polar.

SOLUCIÓN:
Si se reemplaza θ por $-\theta$ en (1):

$$r = 4 \text{ sen}(-\theta)$$

$$r = -4 \text{ sen } \theta \qquad \ldots(2)$$

Obsérvese que las ecuaciones (1) y (2) no son equivalentes, como se demostró en el ejercicio 4.15.

Por otra parte, si se cambia ahora r por $-r$ y θ por $\pi - \theta$, en (1), el resultado es el mismo:

$$-r = 4\text{sen } (\pi - \theta)$$

pero:

$$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen } \theta,$$

por lo que se llega a:

$$-r = 4 \text{ sen } \theta$$

o bien:

$$r = -4 \text{ sen } \theta$$

que es la misma ecuación (2) y que, como ya se dijo, no es equivalente a la (1), por lo que se deduce que la curva no es simétrica con respecto al eje polar.

b) Con respecto al eje copolar

TEOREMA 4.2. *La curva representada por la ecuación (A) es simétrica con respecto al eje copolar si al sustituir:*

i) θ *por* $\pi - \theta$, *ó*

ii) r *por* $-r$ *y* θ *por* $-\theta$,

la ecuación permanece inalterada o se convierte en una ecuación equivalente.

EJERCICIO 4.20. Determinar si la curva de ecuación polar

$$r = \theta + 2\pi \qquad \text{...(1)}$$

es simétrica con respecto al eje copolar.

SOLUCIÓN:
Si en la ecuación (1) se cambia θ por $\pi - \theta$, resulta:

$$r = (\pi - \theta) + 2\pi$$

reduciendo términos semejantes:

$$r = -\theta + 3\pi \qquad \text{...(2)}$$

Las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes, según se demostró en el ejercicio 4.14; por lo tanto, la curva es simétrica con respecto al eje copolar.

c) Con respecto al polo

TEOREMA 4.3. *La curva, una de cuyas ecuaciones polares es la (A), es simétrica con respecto al polo si al cambiar:*

i) θ *por* $\pi + \theta$, *ó*

ii) r *por* $-r$,

la ecuación no se altera o resulta una ecuación equivalente.

EJERCICIO 4.21. Determinar si la curva

$$r = 6 \text{ sen } 4\theta \qquad \text{...(1)}$$

tiene simetría con respecto al polo.

SOLUCIÓN:
Si en (1) se sustituye r por $-r$, se obtiene:

$$-r = 6 \text{ sen } 4\theta$$

que es igual a:

$$r = -6 \text{ sen } 4\theta \qquad \ldots(2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) no son iguales, ni es posible llegar de una a otra con una simplificación algebraica, ni por medio de la aplicación de una identidad trigonométrica; de manera que se verá si son equivalentes. Si en (1) se sustituye r por $-r$ y θ por $\theta \pm (2n - 1)\pi$:

$$-r = 6 \text{ sen } 4[\theta \pm (2n - 1)\pi]$$

efectuando operaciones:

$$r = -6 \text{ sen } [4\theta \pm 4(2n - 1)\pi] \qquad \ldots(3)$$

para que las ecuaciones (3) y (2) resulten iguales basta con hacer $n=1$ que es un número natural, por lo que las ecuaciones (1) y (2) sí son equivalentes y la curva sí tiene simetría con respecto al polo.

TEOREMA 4.4. *Sea la curva*

$$r = f(\theta) \qquad \ldots(A)$$

Si la curva representada por (A) *es simétrica con respecto a los ejes polar y copolar, entonces también lo es con respecto al polo.*

En efecto, al sustituir θ por $-\theta$, en (A) queda:

$$r = f(-\theta) \qquad \ldots(B)$$

Como la curva es simétrica con respecto al eje polar, (A) y (B) son equivalentes.

Por otra parte, si en (B) se sustituyen r por $-r$ y θ por $-\theta$, entonces:

$$-r = f(\theta) \qquad \ldots(C)$$

que es equivalente a (B) y a (A) por la hipótesis de simetría con respecto al eje copolar; es decir, (A), (B) y (C) representan el mismo lugar geométrico. Ahora, si en (A) se sustituye r por $-r$ para investigar si la curva es simétrica con respecto al polo:

$$-r = f(\theta)$$

que es la misma ecuación (3). Como se llegó a una ecuación equivalente, la curva sí es simétrica con respecto al polo.

Q.E.D.

4.5.3 OTRAS CARACTERÍSTICAS

a) La curva contiene o no al polo

Parece inútil que se investigue si la curva (A) contiene al polo después que se han determinado las coordenadas de los puntos de intersección de la curva con el eje polar y con el eje copolar; sin embargo, debe recordarse que el polo es un punto muy particular, tan lo es que en matemáticas se dice que se trata de un punto singular. Ello se debe a que sus coordenadas son $O(0, \theta)$; $\theta \in \mathbb{R}$. Esto significa que en la ecuación (A) puede ser que para algún valor de θ diferente de los que se han empleado para analizar las intersecciones con los ejes el módulo se anule. Entonces, para saber si la curva contiene al polo, deben determinarse los valores de θ para los cuales r se anule.

EJERCICIO 4.22. Determinar si la curva

$$r = \sqrt{6} \cos \theta - \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \qquad \ldots(1)$$

contiene al polo.

SOLUCIÓN:
Se sugiere al lector que compruebe que el único punto de intersección de la curva con el eje polar es $P_1(\sqrt{6}, 0)$, obtenido al considerar $\theta = z\pi$; z entero. Por otra parte, la curva nada más tiene un punto de intersección con el eje copolar, que es

$$P_2\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

para $\theta = \pm \dfrac{(zn - 1)\pi}{2}$, n natural, esto es determinándolos con los criterios anteriormente expuestos; tal parece que la curva no contiene al polo; sin embargo, si en (2) se hace $r = 0$ se obtiene:

$$\sqrt{6}\cos\theta - \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

efectuando operaciones:

$$\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta = \sqrt{6}\cos\theta$$

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

y como para $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ la igualdad se satisface, resulta que la curva sí contiene al polo.

EJERCICIO **4.23.** Determinar si la curva

$$r = \frac{5}{2\cos\theta + 7\,\text{sen}\,\theta} \qquad \text{...(1)}$$

contiene al polo.

SOLUCIÓN:

Si se determinan los puntos de intersección de la curva con los ejes, ninguno de ellos es el polo. Por otra parte, si se hace cero el primer miembro de la ecuación (1):

$$\frac{5}{2\cos\theta + 7\,\text{sen}\,\theta} = 0$$

es claro que la ecuación anterior no se satisface para ningún valor de θ, por lo que la curva no contiene al polo.

b) La curva es cerrada o abierta

En algunas de las aplicaciones de las curvas es conveniente saber si la curva encierra una región y poder calcular áreas, longitudes, o cualquier otro requerimiento. El problema aquí es ponerse de acuerdo en lo que es una curva cerrada o abierta, ya que no se tiene precisión al respecto. La mayoría de los autores que tratan este asunto definen a una curva cerrada si al expresar r en *función* de θ, r existe para cualquier valor de θ.

Es conveniente hacer algunas aclaraciones sobre la definición anterior:

i) La definición comúnmente expresada por los diversos autores menciona que r debe escribirse en función de θ y eso no siempre es posible. Puede expresarse a r *en términos* de θ, pero sin exigir la relación funcional.

ii) En la definición se habla sobre la existencia de r para cualquier valor de θ, pero esta existencia incluye la posibilidad de que r sea un número complejo. Es decir, de acuerdo con la definición, una curva es cerrada aunque para algunos valores de θ los valores de r sean complejos. Una situación así se presenta, por ejemplo, con la lemniscata de ecuación $r^2 = 25 \cos 2\theta$.

Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, el valor del módulo es complejo; sin embargo, la curva de acuerdo con la definición es cerrada. La gráfica de la lemniscata se presenta en la figura 4.16.

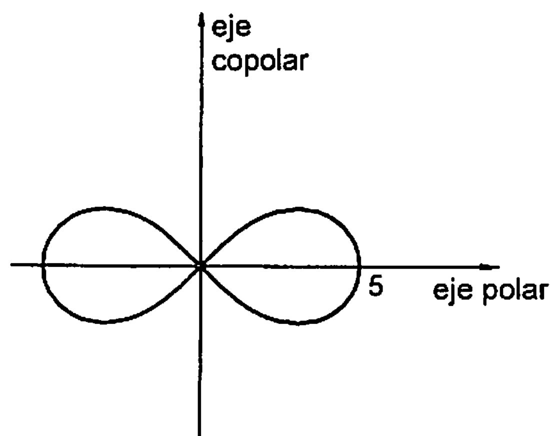


FIGURA 4.16

iii) Varios autores llaman al análisis de la curva para ver si es cerrada la "extensión" de la curva. La palabra no es la más adecuada para expresar lo anterior De manera que en estas líneas no se usará.

Como puede observarse son varios los inconvenientes de la definición de curva cerrada, por lo que se adoptarán como características de curva cerrada o abierta las descritas en las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 4.7. *Una curva es cerrada si al expresar a r o a r^2 en términos de θ, el primer miembro de la ecuación existe para cualquier valor de θ.*

DEFINICIÓN 4.8. *Una curva es abierta si no es cerrada*

EJERCICIO 4.24. Determinar si la curva expresada por la ecuación polar $r = \dfrac{\cos \theta}{2 \cos \theta + 1}$ es cerrada o abierta.

SOLUCIÓN:

Analizar la ecuación polar de la curva, las posibilidades de que r no exista se tienen cuando el denominador es nulo; esto es:

$$2 \cos \theta + 1 = 0$$

como sí existen valores de θ para los cuales esta igualdad se satisface, se concluye que la curva es abierta. La figura 4.17 muestra la expresión gráfica de la curva y en ella puede apreciarse que la curva, a pesar de ser abierta, sí encierra una región con uno de sus *lazos*.

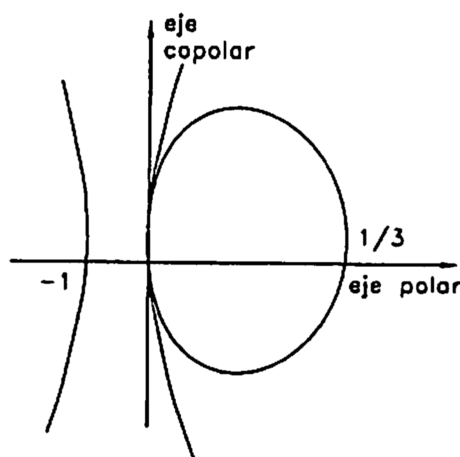


FIGURA 4.17

EJERCICIO 4.25. Determinar si la curva $r = 2 \cos \theta$ es cerrada.

SOLUCIÓN:

Como los valores de la función coseno varían siempre entre menos uno y uno, no hay posibilidad de que r no exista, por lo que la curva es cerrada.

Es pertinente señalar que en los textos en los que se habla de la discusión de la ecuación polar de una curva, se incluyen en ella algunos pasos que aquí no se tomarán como parte del método; entre ellos:

— **Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.** Si después de hacer todo lo anterior no se ha identificado la curva, es lógico que se valúen las coordenadas de algunos puntos; sin embargo, esto no se considera que forme parte de ningún método, es sólo un recurso no muy adecuado, en ocasiones.

— **Gráfica de la curva.** Éste podría ser el objetivo de la discusión y no un paso de ella. Además, podría no ser necesario tener la representación gráfica de la curva, sin descuidar el hecho de que existen herramientas de computación que pueden hacer mucho mejor este trabajo por nosotros; sin embargo, si se pidiera a alguno de los paquetes computacionales existentes que dibujara la gráfica de la curva del ejercicio 4.24, sin tener en consideración que la curva es abierta, el resultado podría ser desastroso. Entonces, es necesario hacer el análisis descrito y después pedir a la computadora la graficación, seccionando en subintervalos el intervalo en estudio.

— **Determinación de la ecuación cartesiana de la curva.** La obtención de la ecuación cartesiana de una curva a partir de su ecuación polar (entendiéndose que se le llame ecuación en singular, pues como se dijo una curva expresada en forma polar siempre es plana y la segunda ecuación cartesiana de la curva será la del plano que la contiene) no se considera como parte esencial de la discusión de la curva, ya que no es siempre recomendable ni necesaria su obtención. En realidad, si la representación de una curva en forma cartesiana o en forma paramétrica o en forma polar, depende de la conveniencia para la utilización de determinado sistema de referencia; de manera que si se están empleando coordenadas polares por su facilidad en el estudio o manejo de una curva, es probable que la obtención de la ecuación cartesiana no conduzca a la identificación de la curva y resulte de una dificultad mucho mayor en su manejo. Por ejemplo, la curva $r = 4\cos 2\theta$, representada en forma polar, tiene como ecuación cartesiana $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 4(x^2 - y^2)$ que evidentemente ni permite identificar la curva y sí es una ecuación más complicada. Lógicamente, aunque no se le considere como un paso indispensable dentro del método de discusión, sí resulta en ocasiones conveniente transformar una ecuación polar a una cartesiana y viceversa.

EJERCICIO 4.26. Identificar la curva representada polarmente por

$$r = 4(1 - \text{sen}\ \theta) \qquad \ldots(1)$$

SOLUCIÓN:

a) Intersecciones con el eje polar

Si $\theta = 0$ se tiene que $r = 4$, de manera que un punto es $A(4,0)$.
Si $\theta = \pi$, de nuevo se obtiene $r = 4$; entonces, otro punto es $B(4,\pi)$.

Cualquier otro valor de $\theta = \pm n\pi$; $n \in \mathbb{N}$ lleva a los mismos puntos. Entonces, los puntos de intersección de la curva con el eje polar son A y B, los cuales se representan en la figura 4.18.

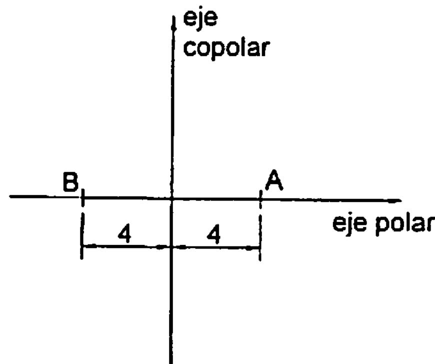


FIGURA 4.18

b) Intersecciones con el eje copolar

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $r = 0$; por lo que el punto es

$$C\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

En realidad se escribieron las coordenadas de C así, pero el valor del ángulo carece de importancia, pues el punto C es el polo.

Ahora, puesto que

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = 8;$$

por lo que otro punto es

$$D\left(8, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Éstos son los dos únicos puntos de intersección con el eje copolar, porque la función coseno es periódica y vuelve a tomar los mismos valores. La figura 4.19 presenta los puntos obtenidos hasta ahora:

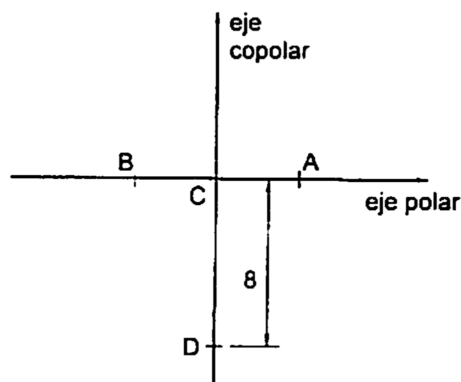


FIGURA 4.19

c) Simetría con respecto al eje polar y al polo

Es inútil hacer este análisis porque observando los puntos C y D que son los únicos de intersección con el eje copolar, no es posible que exista simetría con respecto al eje polar, ya que el punto D no tiene su simétrico. La misma razón se tiene para evitar el análisis de la simetría con respecto al polo.

d) Simetría con respecto al eje copolar

Como los puntos A y B son simétricos con respecto al eje copolar, puede existir dicha simetría para toda la curva. No puede asegurarse, pero sí vale la pena realizar el estudio.

Si en (1) se sustituye $P(r,\ \theta)$ por $Q(-r,\ -\theta)$, se tiene:

$$-r = 4[1 - \text{sen}(-\theta)]$$

que se convierte en

$$r = -4(1 + \text{sen}\ \theta) \qquad \ldots(2)$$

para ver si (1) y (2) son equivalentes, en (1) se sustituye

$$P(r,\ \theta) \text{ por } Q(-r,\ \theta \pm (2n - 1)\pi)$$

y queda:

$$-r = 4\{1 - \text{sen}[\theta \pm (2n - 1)\pi]\}$$

y al hacer operaciones y tomar en cuenta una identidad trigonométrica:

$$r = -4(1 + \text{sen}\ \theta)$$

que es exactamente igual a (2), por lo que la curva es simétrica con respecto al eje copolar.

e) La curva es cerrada o abierta

Debido a que r existe para cualquier valor de θ, la curva es cerrada.

f) Dando algunos valores a θ se tiene:

θ	r
$\frac{\pi}{6}$	2.00
$\frac{\pi}{4}$	1.17
$\frac{\pi}{3}$	0.54
$\frac{10\pi}{3}$	7.46
$\frac{7\pi}{4}$	6.83
$\frac{11\pi}{6}$	6.00

Si se llevan estos valores a una gráfica y se toman en cuenta los resultados de intersecciones y simetrías, además de completar los trazos, la representación geométrica de la curva queda:

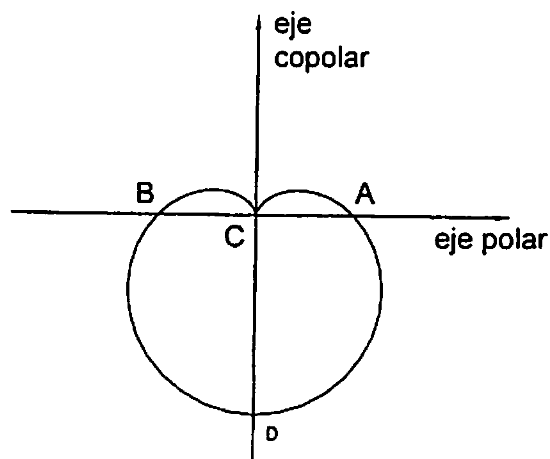


FIGURA 4.20

Se trata de una cardioide.

EJERCICIO 4.27. Determinar una ecuación cartesiana de la curva

$$r = 8 \cos \theta \qquad \ldots(1)$$

SOLUCIÓN:

Para obtener una ecuación cartesiana de la curva puede hacerse uso de las ecuaciones de transformación de coordenadas polares a cartesianas o viceversa, que debe recordarse son:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \text{ang tan}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \text{ sen } \theta \end{cases}$$

Lógicamente, si se trata sólo de llegar a *cualquier* solución, basta con escribir:

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = 8 \cos\left(\text{ang tan}\frac{y}{x}\right)$$

pero el lector debe comprender que la obtención de una representación cartesiana de una curva no es el objetivo final de un problema real, por lo que debe tratarse de llegar a una expresión que permita su manejo más sencillo; de manera que si en (1) se multiplica en ambos miembros por r:

$$r^2 = 8r \cos \theta$$

sustituyendo:

$$x^2 + y^2 = 8x$$

que ya es la ecuación cartesiana, pero que se puede llevar a su forma ordinaria, de manera que completando cuadrados:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 16$$
$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

que es una circunferencia con centro en (4,0) y radio igual a 4.

EJERCICIO 4.28. Sea la curva que tiene como una de sus representaciones polares a:

$$r^2\ 10\sqrt{2}\, r \cos\left[\theta - \frac{\pi}{4}\right] + 46 = 0$$

si se considera al plano polar coincidiendo con el plano XY, determinar:

a) una representación cartesiana de (1);

b) una representación vectorial de la curva.

Comparar los resultados.

SOLUCIÓN:

a) Para obtener la representación cartesiana, primeramente se tomará en cuenta la identidad:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B,$$

$$r^2 - 10\sqrt{2}r\left[\cos\theta \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right] + 46 = 0$$

pero

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo:

$$r^2 - 10\sqrt{2}r\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\right] + 46 = 0$$

simplificando:

$$r^2 - 10r\cos\theta - 10r\operatorname{sen}\theta + 46 = 0$$

tomando en cuenta las ecuaciones de transformación:

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 46 = 0$$

llevando la ecuación a su forma ordinaria:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 50 - 46$$

que resulta:

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 4$$

por lo que la representación cartesiana de la curva es:

$$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Ahora para la representación vectorial de la curva, puede hacerse una analogía entre:

$$8\frac{(x - 5)^2}{4} + \frac{(y - 5)^2}{4} = 1$$

y

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

por lo que queda:

$$\frac{(x - 5)^2}{4} = \cos^2 \theta; \quad \frac{(y - 5)^2}{4} = \text{sen}^2 \theta$$

de donde:

$$\begin{cases} x = 5 + 2 \cos \theta \\ y = 5 + 2 \text{ sen } \theta \quad ;0 \leq \theta < 2\pi. \\ z = 0 \end{cases}$$

finalmente:

$$\bar{r} = [5 + 2 \cos \theta] i + [5 + 2 \text{ sen } \theta] j; \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Nótese que la curva es una circunferencia alojada en el plano XY, con centro en el punto $C(5,5)$ y radio igual a 2.

La comparación de los resultados arroja las siguientes observaciones:

— La representación polar es bastante complicada. Por esa razón, en el tratamiento que se ha dado a las curvas expresadas en forma polar no se ha descrito, ni se describirá, la "fórmula general de la circunferencia", que algunos textos tratan. Si lo que se intenta con trabajar en forma polar es facilitar los cálculos, no parece razonable que se use esa expresión.

— La representación cartesiana es más simple que la polar; sin embargo, para algunas aplicaciones es mejor trabajar con la vectorial puesto que se trata de una función, ya que a cada valor de θ corresponde un solo vector $\bar{r}$; mientras que la forma cartesiana no establece una relación funcional entre las variables.

— Debe tenerse especial cuidado con la notación, pues en este ejercicio se ha empleado en todas las representaciones la notación más usual y véase que en la forma polar se utiliza la r sin línea arriba; es decir, se trata de un escalar; mientras que en la expresión vectorial se emplea la $\bar{r}$ que es un vector. Por si fuera poco, en las aplicaciones geométricas, es frecuente que el parámetro se denomine con θ y para la ecuación polar se usa la misma letra griega. No obstante, las dos θ no representan el mismo ángulo; para la forma polar las variables utilizadas están representadas en la figura 4.21a, mientras que en la figura 4.21b puede observarse la misma circunferencia, pero ahora ahí se distinguen las variables usadas para la representación vectorial.

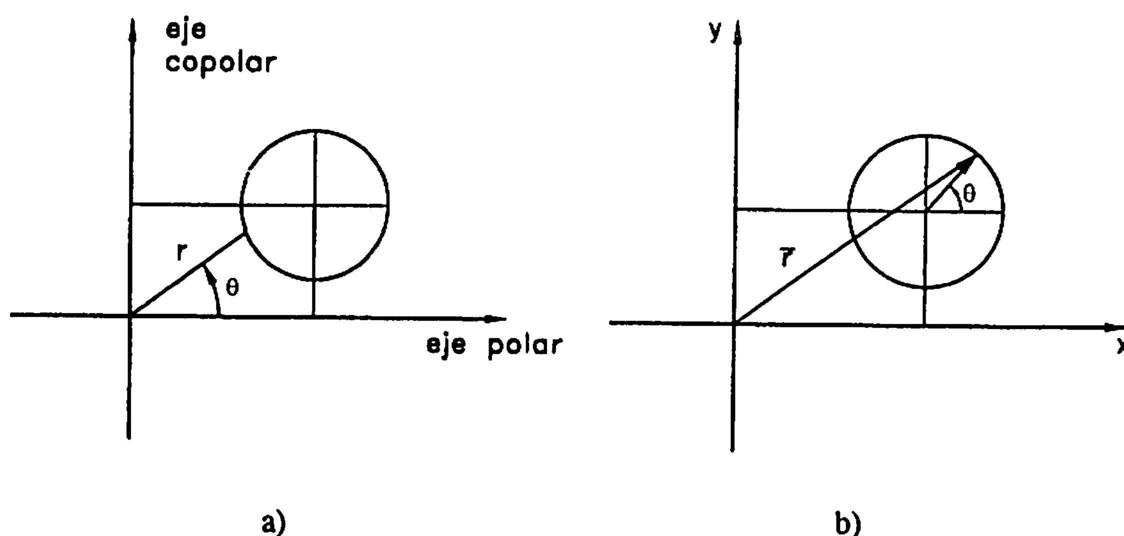


FIGURA 4.21

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1. Determinar si el punto $A(11,5,0)$ pertenece a la curva de ecuaciones:

$$C:\begin{cases} x = 3(y-4)^2 + 2(z-2)^2 \\ 2x - 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

4.2. Determinar si las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - z = 0 \\ 6x + 8y - z - 11 = 0 \end{cases}$$

representan una curva.

4.3. Sean las ecuaciones

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 9 \\ x = a \end{cases}$$

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$; las ecuaciones representan una curva?

4.4. Sea la curva de ecuaciones $C:\begin{cases} y + 3z - x^2 = 7 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$

Determinar las coordenadas del punto de intersección de C con el plano π: $x = 1$.

4.5. Sea la circunferencia

$$C:\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$$

Expresar paramétricamente a la circunferencia, de tal manera que el *recorrido* del vector de posición que barre a la curva se inicie en el punto $(3,1,0)$ y el sentido del recorrido del extremo de dicho vector sea el de las manecillas de un reloj (sentido negativo).

4.6. Sea la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2 - t} \\ y = \dfrac{3}{t} \\ z = \dfrac{5}{\sqrt{t+4}} \end{cases}$$

a) Determinar el intervalo paramétrico.

b) ¿Cuáles son los valores que pueden tener las abscisas, las ordenadas y las cotas de la curva?

4.7. Sea la curva $\bar{r} = \left(t^2 - 4t + 2,\ \ t^2 + t - 3,\ \ 3t - 5\right)$. Determinar si el punto (-2, 3, 1) pertenece a la curva.

4.8. Un jugador de baloncesto tiene dos oportunidades de encestar. Si la canasta se localiza en las coordenadas (3,3,3) y la trayectoria del primer tiro tiene por ecuaciones:

$$C_1: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t + 1 \\ z = -t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

y la del segundo intento tiene por ecuaciones:

$$C_2: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t^2 + \dfrac{11}{4}t + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Determinar si encesta los dos tiros, uno solo o ninguno.

4.9. Sea la ecuación polar $r = \cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$.

Determinar si la curva que representa es simétrica con respecto al:

a) Eje polar

b) Eje copolar

c) Polo

4.10. Demostrar que si a y b no son simultáneamente nulos y $a,b \in \mathbb{R}$;
entonces, $r = a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta$ representa una circunferencia que contiene al polo.

4.11. Sea la ecuación $r = \dfrac{4}{a + \cos \theta}$

Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ de tal manera que la curva sea cerrada.

4.12. El teorema 4.4 establece que si una curva es simétrica con respecto tanto al eje polar como al eje copolar, entonces también lo es con respecto al polo.

Comprobar que una curva puede ser simétrica con respecto al polo y no serlo con respecto a los ejes, por medio del contraejemplo $r^2 = \dfrac{6}{\text{sen } 2\theta}$.

¿Por qué no se contradice el teorema?

4.13. Sea la curva

$$P: \begin{cases} x = 1 - \dfrac{t^2}{4} \\ & ;0 \le t \le 2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

expresar en forma polar a la misma curva.

4.14. Sea la curva de ecuaciones

$$E: \begin{cases} x = m^2 - 2m - 2 \\ y = m - 1 \\ z = -m^2 + 5 \end{cases}$$

Determinar si la curva tiene un punto simétrico de $A(1,-2,4)$ con respecto al eje x.

4.15. Identificar la curva $r = \dfrac{4}{2 \cos \theta - \text{sen } \theta}$.

4.16. Determinar unas ecuaciones cartesianas de la curva $\bar{r} = [2 \text{ sen } \theta, \text{ sen } 2\theta, 0, 0]; \ \theta \in \mathbb{R}$

4.17. Identificar la curva

$$C: \begin{cases} x = 3 \\ y = \cot \theta \\ & ;\theta \ne \dfrac{z\pi}{2}, z \in \mathrm{I} \\ z = \tan \theta \end{cases}$$

4.18. Determinar una ecuación polar de la recta

$$R: \begin{cases} y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

CAPÍTULO 5

SUPERFICIES

5.1 INTRODUCCIÓN

DEFINICIÓN 5.1. *Se llama superficie al lugar geométrico de todos los puntos que tienen representación gráfica en el espacio de tres dimensiones y cuya relación matemática representativa cuenta con una sola ecuación del tipo:*

$$F(x,y,z) = 0$$

Es conveniente hacer notar que no todas las ecuaciones de ese tipo representan una superficie, por ejemplo:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = -8 \qquad \ldots(2)$$

$$x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 25 \qquad \ldots(3)$$

La ecuación (1) representa sólo un punto, que en este caso es el origen, ya que únicamente es satisfecha para los valores $x = y = z = 0$. La ecuación (2) no representa nada, ya que la suma de tres cantidades positivas no puede ser negativa. La ecuación (3) representa una superficie llamada *elipsoide*.

Por otra parte, también es necesario aclarar que en la parte correspondiente a la geometría analítica de dos dimensiones se representaba una curva con una sola ecuación, pero ello se debía a que se estaba trabajando siempre en el plano XY, cuya ecuación es $z = 0$. Entonces, cualquier curva, en ese caso, tenía la ecuación con la que se trabajaba y la anteriormente citada. Esto además quiere decir que una curva en el espacio tridimensional requiere para su representación de dos ecuaciones cartesianas, lo que significa, en realidad, que una curva puede obtenerse como la intersección de dos superficies. Como un ejemplo de este caso se tiene la representación de una recta por medio de dos ecuaciones cartesianas, como se ve en el tema correspondiente. De

la misma manera, por ejemplo, una circunferencia en el espacio de tres dimensiones puede representarse como la intersección de una esfera y un plano, como se verá más adelante.

5.2 CLASIFICACIÓN DE ALGUNOS TIPOS DE SUPERFICIES

A continuación se presentan los nombres de algunos tipos de superficies, de acuerdo con sus características geométricas o con las de sus ecuaciones.

a) Superficies alabeadas

Son aquellas que no pueden estar contenidas en un plano.

b) Superficies cuádricas o cuadráticas

Para empezar, en Geometría Analítica Plana se habla de las curvas cónicas, las cuales se caracterizan por estar representadas por una ecuación de segundo grado. Ahora, en tres dimensiones, a las superficies que tienen su representación analítica del tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Ez^2 + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

se les llama superficies cuádricas o cuadráticas.

Las cuádricas se subclasifican a su vez en

Esferas
Elipsoides
Hiperboloides de uno y dos mantos
Paraboloides circulares o de revolución
Paraboloides elípticos
Paraboloides hiperbólicos
Degeneraciones de las anteriores

c) Superficies cilíndricas

Se llama superficie cilíndrica a aquella que se forma con el movimiento de una recta que se conserva siempre paralela a un vector dado y que se apoya en una curva fija.

De acuerdo con esta definición, el cilindro circular recto, llamado simplemente cilindro desde la escuela primaria, es sólo un caso particular de estas superficies, pues hay cilindros parabólicos, elípticos, etc.

d) Superficies cónicas

Se llama superficie cónica a aquella que se genera con el movimiento de una recta que pasa siempre por un punto fijo llamado vértice y que se apoya en una curva fija.

Para este caso vale también una aclaración similar a la de los cilindros, pues el llamado cono es sólo la mitad de un cono circular recto, ya que la superficie se extiende hacia ambos lados del vértice, y existen también conos diferentes al circular recto.

e) Superficies regladas

Son las superficies que pueden generarse por medio de rectas. Esto significa que tanto los cilindros como los conos son superficies regladas. Además, lo anterior permite precisar que de acuerdo con la presente clasificación, una superficie puede quedar incluida en varias categorías. Un ejemplo de esto, que además resulta curioso, es que el plano es una superficie cilíndrica, cónica y, por supuesto, reglada.

f) Superficies de revolución

Son aquellas que se generan con el giro de una curva plana llamada meridiana, alrededor de un eje contenido en el mismo plano. Algunos ejemplos de estas superficies son las esferas, los cilindros circulares rectos, los conos circulares rectos y hoy en día muy frecuentemente utilizados paraboloides circulares.

5.3 MÉTODO DE LAS GENERATRICES

El estudio de la Geometría Analítica tiene dos objetivos principales, a saber: la obtención de la expresión matemática del lugar geométrico en estudio y la identificación de éste cuando su expresión es conocida.

A continuación se presenta un método que conduce a alcanzar el primero de esos objetivos en lo que se refiere a las superficies. Antes de establecer este método, conviene enunciar algunas definiciones.

DEFINICIÓN 5.2. *Curva generatriz es aquella que cambia de posición, y en ocasiones de forma, apoyándose en una o varias curvas fijas llamadas directrices y que con su movimiento genera una superficie.*

Las ecuaciones de una generatriz son identificables pues contienen parámetros, ya que son curvas que cambian y los parámetros, al tomar diferentes valores, provocan ese cambio. Para representar parámetros se utilizarán letras griegas minúsculas, como α, β, γ, etc.

DEFINICIÓN 5.3. *Se llama directriz a aquella curva que se mantiene fija y que señala la dirección que debe seguir la generatriz al moverse para formar una superficie.*

Las ecuaciones de una directriz no tienen parámetros pues son curvas fijas.

5.3.1 DATOS PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO

Las ecuaciones de la o las directrices y de la generatriz.

Estas ecuaciones son datos propiamente dichos o pueden ser obtenidas tomando en cuenta las características geométricas de la superficie en estudio.

5.3.2 OBJETIVO DEL MÉTODO

Determinar la ecuación de la superficie, trabajando de manera sistemática con las ecuaciones indicadas.

5.3.3 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

a) Con las ecuaciones de la generatriz y con las de una de las directrices, se eliminan las variables x, y, z; quedando así una ecuación con sólo parámetros y constantes. Esta ecuación se llama ecuación de condición. Esto mismo se repite con las ecuaciones de la generatriz y con las de cada una de las directrices, de manera que al término de esta etapa se tendrán tantas ecuaciones de condición como directrices existan.

b) Con todas las ecuaciones de condición y las de la generatriz, se eliminan los parámetros, con lo que queda una sola ecuación donde intervienen constantes y variables, y ésa es la ecuación de la superficie.

Observación. Para la correcta aplicación del método, el número de parámetros debe ser igual al número de directrices más uno. En ocasiones resulta más sencillo verificar que el número de directrices debe ser igual al número de parámetros menos uno, esto cuando se establecen primero las ecuaciones de la generatriz y, por lo tanto, se conoce previamente el número de parámetros.

A continuación se presentan unos ejercicios ilustrativos del método, y después de ellos se hace una justificación de él.

EJERCICIO 5.1. Determinar la ecuación de la superficie que se genera con el desplazamiento de la curva:

$$G: \begin{cases} z - \alpha = \beta y^2 & \quad ...(1) \\ x = \gamma & \quad ...(2) \end{cases}$$

al apoyarse simultáneamente en las curvas:

$$D_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \quad ...(3) \\ z = 1 & \quad ...(4) \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} z = x^2 & \quad ...(5) \\ y = 0 & \quad ...(6) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

En este ejercicio se puede fácilmente identificar la generatriz, que es la curva G, ya que en sus ecuaciones tiene los parámetros α, β y γ. Por otra parte, al tener tres parámetros en sus ecuaciones, se deben tener dos directrices, que son las curvas D_1 y D_2.

a) Con G y D_1, eliminación de las variables x, y, z:

Como

$$x = \gamma$$

$$y^2 = 1 - \gamma^2$$

llevando este valór a (1), y tomando en cuenta (4):

$$1 - \alpha = \beta\,(1 - \gamma^2) \qquad ...(C_1)$$

que es la primera ecuación de condición.

Ahora con G y D_2:

Dado que

$$x = \gamma$$

$$z = \gamma^2$$

llevando este valor a (1) y tomando en cuenta (6):

$$\gamma^2 - \alpha, = 0 \qquad \text{...(C}_2\text{)}$$

b) Eliminación de los parámetros trabajando simultáneamente con G, (C_1) y (C_2):

tomando en cuenta (2) en (C_2):

$$x^2 = \alpha \qquad \text{...(7)}$$

despejando β de (1):

$$\beta = \frac{z - \alpha}{y^2}$$

llevando este valor a (C_1):

$$1 - \alpha = \frac{z - \alpha}{y^2}(1 - \gamma^2)$$

de (7) y (2):

$$1 - x^2 = \frac{z - x^2}{y^2}(1 - x^2)$$

y que es la ecuación de la superficie, pero simplificando un poco esta expresión, finalmente queda:

$$x^2 + y^2 = z \qquad \text{...(S)}$$

La superficie representada por esa ecuación es un paraboloide de revolución, como se muestra en la figura 5.1, y es la que se forma con el movimiento de una parábola, como G, al apoyarse en una circunferencia y en una parábola, D_1 y D_2, respectivamente.

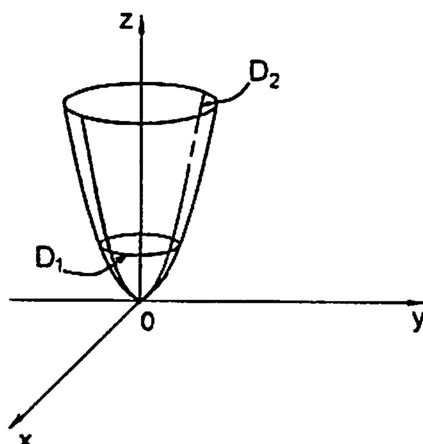


FIGURA 5.1

EJERCICIO 5.2. Determinar la ecuación de la esfera de radio R y centro $C(h,k,\ell)$.

SOLUCIÓN:
Sea la esfera representada en la figura 5.2.

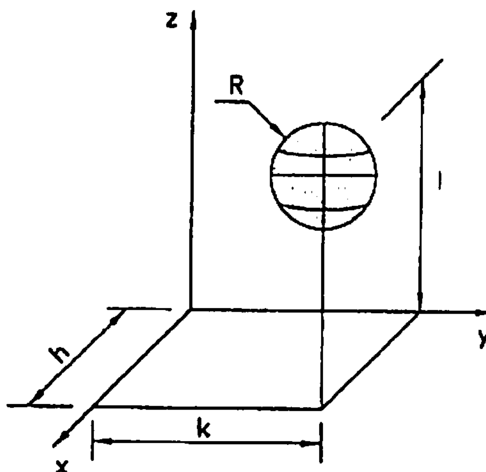


FIGURA 5.2

En este caso, no se dan como datos las ecuaciones de la generatriz ni de las directrices, pero si se considera que esta esfera puede formarse al tomar como directriz a una circunferencia de radio R y centro $C(h,k,\ell)$, contenida en un plano paralelo al YZ, como se muestra en la figura 5.2; y como generatriz, a una circunferencia horizontal que tiene su centro siempre en la recta vertical que pasa por el centro de la esfera, y que esa circunferencia en su desplazamiento debe tocar constantemente a la directriz.

Las ecuaciones de la directriz son:

$$D: \begin{cases} (y - k)^2 + (z - \ell)^2 = R^2 & \ldots(1) \\ x = h & \ldots(2) \end{cases}$$

y las de la generatriz:

$$G: \begin{cases} (x - h)^2 + (z - \ell)^2 = R^2 & \ldots(3) \\ x = \beta & \ldots(4) \end{cases}$$

Obsérvese que los parámetros representan los cambios que se producen en la generatriz para formar la superficie; así, α corresponde al radio variable de la circunferencia horizontal y β es la distancia que separa esa circunferencia del plano XY.

Aplicación del método:

a) sustituyendo (4) en (1):

$$(y - k)_2 + (\beta - \ell)^2 = R^2 \qquad \ldots(5)$$

ahora (2) en (3):

$$(y - k)^2 = \alpha \qquad \ldots(6)$$

llevando este valor a (5):

$$\alpha + (\beta - \ell)^2 = R^2 \qquad \ldots(C)$$

b) Con la ecuación de condición y las de la generatriz:

sustituyendo (3) en (C):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (\beta - \ell)^2 = R^2$$

finalmente, tomando en cuenta (4):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2 = R^2 \qquad \text{...(S)}$$

EJERCICIO 5.3. Sea la tubería que se muestra en la figura 5.3, constituida por un cilindro circular recto, de 4 metros de diámetro, con eje oblicuo a los ejes coordenados. Determinar su ecuación.

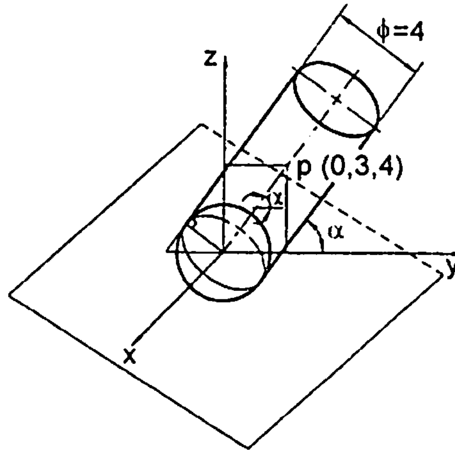


FIGURA 5.3

SOLUCIÓN:

Para resolver este problema, se considerará como directriz una circunferencia, con centro en el origen y contenida en un plano perpendicular al eje del cilindro. Para obtener sus ecuaciones, dicha circunferencia se puede considerar como la intersección de una esfera y un plano:

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 & \text{...(1)} \\ z = -\dfrac{3}{4}y & \text{...(2)} \end{cases}$$

Por otra parte, la generatriz será una recta paralela al eje que se apoyará continuamente en la directriz. Para expresar esta generatriz, primero se determina un vector que defina la dirección:

$$\bar{v} = 0i + 3j + 4k$$

Las ecuaciones de la generatriz se plantearán en forma simétrica:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Dado que se trata de un vector paralelo al plano YZ, se tendrá un parámetro que indique la distancia de la recta generatriz con dicho plano. Por otro lado:

$$\frac{y - y_0}{3} = \frac{z - z_0}{4}$$

$$z = \frac{4}{3} y - \frac{4}{3} y_0 + z_0$$

si se hace $\alpha = -\frac{4}{3} y_0 + z_0$

entonces:

$$G: \begin{cases} z = \frac{4}{3} y + \alpha & \text{...(3)} \\ x = \beta & \text{...(4)} \end{cases}$$

Aplicación del método:

a) sustituyendo (2) en (1):

$$x^2 + y^2 + \frac{9}{16} y^2 = 4$$

$$y^2 + \frac{25}{16} y^2 = 4 \qquad \text{...(5)}$$

igualando (2) y (3):

$$- \frac{3}{4} y = \frac{4}{3} y + \alpha$$

$$y = - \frac{12}{25} \alpha \qquad \text{...(6)}$$

(4) y (6) en (5):

$$\beta^2 + \frac{25}{12} \frac{144}{625} \alpha^2 = 4$$

$$\beta^2 + \frac{9}{25} \alpha^2 = 4 \qquad \text{...(C)}$$

b) (3) y (4) en (C):

$$x^2 + \frac{9}{25} (z - \frac{4}{3} y)^2 = 4$$

finalmente:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(3z - 4y)^2}{100} = 1 \qquad \ldots(S)$$

EJERCICIO 5.4. Determinar la ecuación de la superficie del ejercicio anterior utilizando la misma recta como generatriz, pero como directriz la elipse que es traza de la superficie con el plano XY, véase figura 5.4.

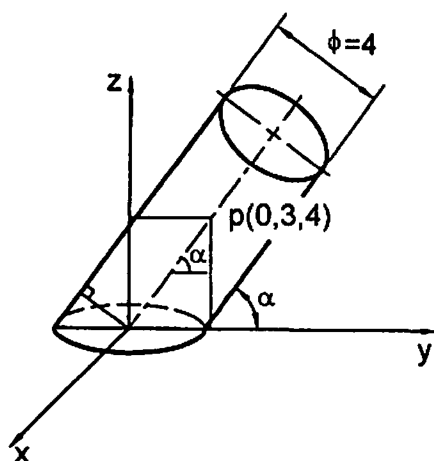


FIGURA 5.4

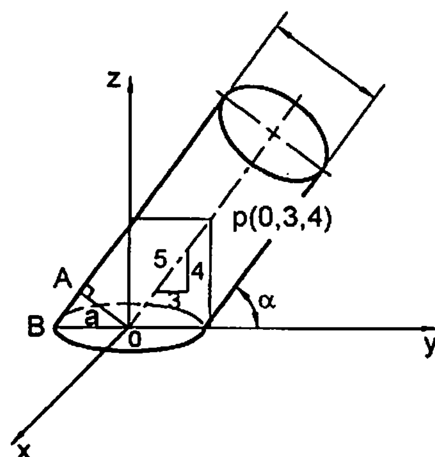


FIGURA 5.5

SOLUCIÓN:

Las ecuaciones de la generatriz son las mismas que las obtenidas en el ejercicio anterior, es decir:

$$G: \begin{cases} z = \dfrac{4}{3}y + \alpha & \ldots(1) \\ x = \beta & \ldots(2) \end{cases}$$

Ahora, para la determinación de las ecuaciones de la directriz, considérese la figura 5.5.

Del triángulo que señala la inclinación del eje del cilindro:

$$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$$

del triángulo OAB:

$$\text{sen } \alpha = \frac{2}{a}$$

igualando y despejando:

$$a = 2.5$$

entonces, las ecuaciones de la directriz quedan:

$$D: \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6.25} = 1 & \ldots(3) \\ z = 0 & \ldots(4) \end{cases}$$

Aplicación del método:

a) (4) en (1):

$$\frac{4}{3} y + \alpha = 0$$

$$y = -\frac{3\alpha}{4} \qquad \ldots(5)$$

(2) y (5) en (3):

$$\frac{\beta^2}{4} + \frac{\left[-\frac{3}{4}\alpha\right]^2}{6.25} = 1$$

$$\frac{\beta^2}{4} + \frac{9\,\alpha^2}{100} = 1 \qquad \ldots(C)$$

b) De (1):

$$\alpha = z - \frac{4}{3}y \qquad \ldots(6)$$

(6) y (2) en (C):

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(3z - 4y)^2}{100} = 1 \qquad \ldots(S)$$

EJERCICIO 5.5. Determinar la ecuación de la misma superficie cilíndrica del ejercicio 5.3, considerando a la recta L de la figura 5.6, como directriz, y a la elipse E de la misma figura, como generatriz.

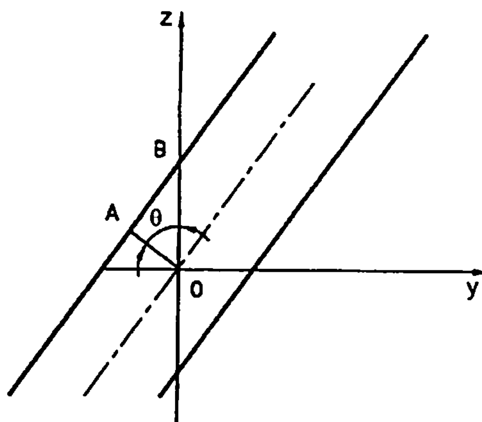


FIGURA 5.6

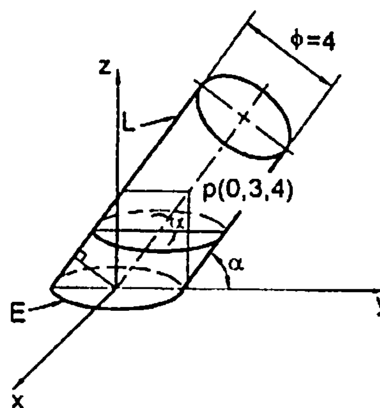


FIGURA 5.7

SOLUCIÓN:

Para determinar las ecuaciones de la directriz se tomará en cuenta el triángulo *OAB* de la figura 5.7:

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB}$$

pero $OA = z$ y $\cos\theta = \frac{3}{5}$

entonces:

$$OB = \frac{10}{3}$$

que es el valor absoluto de la cota al origen de la recta L.

Por lo tanto, las ecuaciones de la directriz quedan:

$$D: \begin{cases} z = \frac{4}{3}y - \frac{10}{3} & \text{...(1)} \\ x = 0 & \text{...(2)} \end{cases}$$

Para las ecuaciones de la generatriz, la elipse en su movimiento no cambia de forma y lo que se modifica de ella es su altura y la ordenada de su centro, entonces:

$$G: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{(y-\alpha)^2}{6.25} & \text{...(3)} \\ z = \beta & \text{...(4)} \end{cases}$$

Aplicación del método:

a) (2) en (3):

$$\frac{(y - \alpha)^2}{6.25} = 1$$

$$(y - \alpha)^2 = 6.25$$

$$y - \alpha = \pm 2.5$$

tomando el valor positivo:

$$y = \alpha + 2.5 \qquad ...(5)$$

(4) y (5) en (1):

$$\beta = \frac{4}{3}(\alpha + 2.5) - \frac{10}{3}$$

$$\beta = \frac{4}{3}\alpha \qquad ...(C)$$

b) (4) en (C):

$$\alpha = \frac{3z}{4}$$

llevando este valor a (3):

$$\frac{x^2}{4} + \frac{\left[y - \frac{3z}{4}\right]}{6.25} = 1$$

finalmente:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(4y - 3z)}{100} = 1 \qquad ...(S)$$

Obsérvese que es la misma ecuación que las obtenidas en los dos ejercicios anteriores, pues:

$$(4y - 3z)^2 = (3z - 4y)^2, \text{ para todo valor de } y, z.$$

EJERCICIO 5.6. Determinar la ecuación de la misma superficie cilíndrica de los casos anteriores, pero ahora tomando como directriz la recta L de la figura 5.8, y como generatriz la circunferencia J de la misma figura.

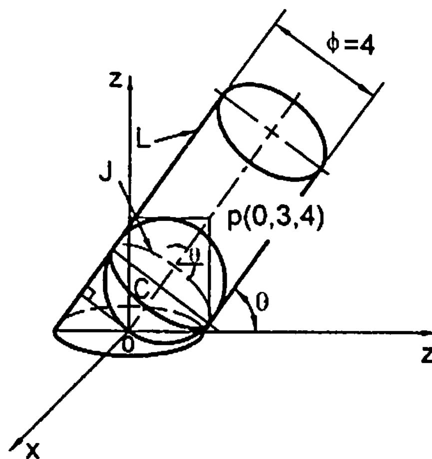


FIGURA 5.8

SOLUCIÓN: Como puede observarse, la directriz es la misma que la que se empleó en el ejercicio 5.8. Así que sus ecuaciones son:

$$D: \begin{cases} z = \dfrac{4}{3}y - \dfrac{10}{3} & \ldots(1) \\ x = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

Para las ecuaciones de la generatriz, la circunferencia móvil puede formarse por medio de la intersección de una esfera de radio 2 y centro en el eje del cilindro, con un plano perpendicular a dicho eje Y y que pasa por el centro de la esfera, véase figura 5.9.

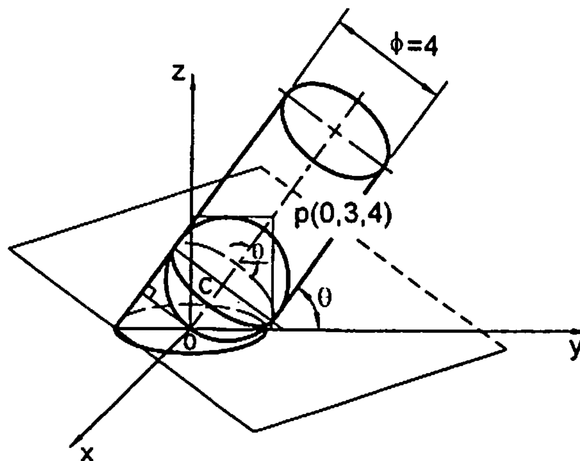


FIGURA 5.9

Las ecuaciones de la generatriz quedan:

$$G: \begin{cases} x^2 + (y - \alpha)^2 + (z - \beta)^2 = 4 \\ z = -\dfrac{3}{4} y + \gamma \end{cases}$$

Como puede verse, los tres parámetros que aparecen se deben a que el centro de la esfera sufre modificaciones en su ordenada y en su cota, y el plano en su cota al origen, véase figura 5.10.

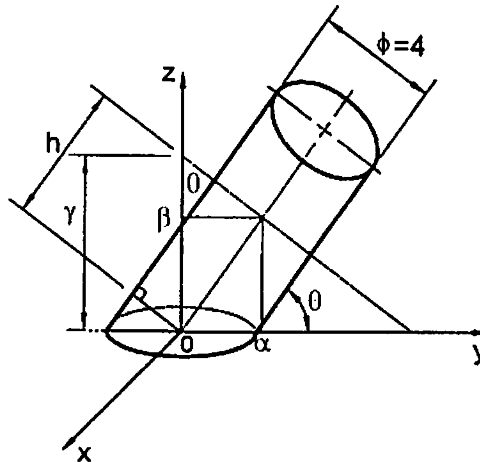


FIGURA 5.10

Aparentemente el método no puede aplicarse, pues se tiene una sola directriz y tres parámetros; sin embargo, pueden relacionarse dos de los parámetros. De la misma figura 5.10:

$$h = \frac{\alpha}{\cos\theta}$$

$$\gamma = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta}$$

entonces:

$$\gamma = \frac{\alpha}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}$$

pero $\cos\theta = 3/5$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{5}$, por lo tanto:

$$\gamma = \frac{25}{12}\alpha$$

sustituyendo en las ecuaciones de la generatriz:

$$G: \begin{cases} x^2 + (y - \alpha)^2 + (z - \beta)^2 = 4 & \ldots(3) \\ z = -\frac{3}{4} y + \frac{25}{12} \alpha & \ldots(4) \end{cases}$$

Aplicación del método:

a) Igualando (1) y (4):

$$\frac{4}{3} y - \frac{10}{3} = -\frac{3}{4} y + \frac{25}{12} \alpha$$

$$\frac{25}{12} y = \frac{25}{12} \alpha + \frac{10}{3}$$

$$y = \alpha + \frac{8}{5} \qquad \ldots(5)$$

(2) y (5) en (3):

$$\left[\alpha + \frac{8}{5} - \alpha\right]^2 + (z - \beta)^2 = 4$$

$$(z - \beta)^2 = \frac{36}{25} \qquad \ldots(6)$$

por otra parte, (5) en (4):

$$z = -\frac{3}{4}\left[\alpha + \frac{8}{5}\right] + \frac{25}{12} \alpha$$

$$z = \frac{4}{3}\alpha - \frac{6}{5} \qquad \ldots(7)$$

(7) en (6):

$$\left(\frac{4}{3} \alpha - \frac{6}{5} - \beta\right)^2 = \frac{36}{25}$$

$$\frac{4}{3} \alpha - \frac{6}{5} - \beta = \pm \frac{6}{5}$$

tomando el valor negativo del miembro derecho, en virtud de que se eligió como directriz la recta colocada inferiormente:

$$\frac{4}{3} \alpha - \frac{6}{5} - \beta = -\frac{6}{5}$$

$$\therefore \beta = \frac{4}{3} \alpha \qquad \ldots(C)$$

b) de (4):

$$\alpha = \frac{12}{25}\left[z + \frac{3}{4}y\right] \qquad \ldots(8)$$

llevando este valor a (C):

$$\beta = \left[\frac{4}{3}\right]\left[\frac{12}{25}\right]\left[z + \frac{3}{4}\right]$$

$$\beta = \frac{16}{25}\left[z + \frac{3}{4}y\right] \qquad \ldots(9)$$

(8) y (9) en (3):

$$x^2 + \left[y - \frac{12}{25}\left[z + \frac{3}{4}y\right]\right]^2 + \left[z - \frac{16}{24}\left[z + \frac{3}{4}y\right]\right]^2 = 4$$

desarrollando y simplificando:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(4y - 3z)^2}{100} = 1 \qquad \ldots(S)$$

5.4 JUSTIFICACIÓN DEL MÉTODO

El fundamento del método se basa en la definición 5.1, es decir, una superficie es el conjunto de puntos del espacio de tres dimensiones cuya representación matemática es una sola ecuación del tipo $F(x, y, z) = 0$.

De acuerdo con esta definición, dos ecuaciones del tipo $F(x, y, z) = 0$, tomadas simultáneamente, representarán aquellos puntos que pertenecen a la vez a dos superficies; es decir, dos ecuaciones cartesianas representan una curva, que es la de intersección entre las dos superficies, cuando esto suceda.

Si se considera a una superficie como el conjunto de toda las posiciones de una curva generatriz, se tiene que las ecuaciones de esa curva cuentan con uno o varios parámetros, ya que esto significa que se trata de una familia de curvas, o dè una curva que cambia de posición o de forma o de ambas simultáneamente.

Considérese primero la generatriz:

$$G: \begin{cases} f_1\,(x,\ y,\ z,\ \alpha) = 0 \\ f_2\,(x,\ y,\ z,\ \alpha) = 0 \end{cases}$$

Como consecuencia de la variación del parámetro α, las ecuaciones G representan una curva variable que se mueve en el espacio y el conjunto de todas sus posiciones constituye la superficie, que es el lugar geométrico de todas esas posiciones.

Para encontrar la ecuación de la superficie engendrada por la curva G, basta eliminar al parámetro α, trabajando simultáneamente con las ecuaciones de la generatriz. Por supuesto al eliminar el parámetro α quedará una ecuación $F(x,\ y,\ z) = 0$, que es la de la superficie, en la cual evidentemente ya no figura el parámetro α. Esta ecuación es satisfecha por todos los sistemas de valores $(x,\ y,\ z)$ que verifican a las ecuaciones G para todos los valores del parámetro α. Esto es cierto porque se sabe que eliminar a una variable consiste en obtener una ecuación que se satisface para los mismos sistemas de valores que verifican a las ecuaciones de donde se partió. Por lo tanto, la ecuación obtenida es la ecuación de la superficie engendrada por la generatriz G.

No siempre se presenta el problema de manera tan simple, pues el número de parámetros en la generatriz puede ser mayor que uno. Así, supóngase que se tienen dos parámetros:

$$G: \begin{cases} f_1\,(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta) = 0 \\ f_2\,(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta) = 0 \end{cases}$$

Si el problema no tiene otros datos es un problema indeterminado porque las ecuaciones G pueden representar a todos los puntos del espacio de tres dimensiones. Supóngase que $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ es un punto cualquiera del espacio de tres dimensiones, al reemplazar sus coordenadas en G:

$$f_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \alpha,\ \beta) = 0$$

$$f_2\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \alpha,\ \beta) = 0$$

Este es un sistema de dos ecuaciones en que las incógnitas son los parámetros α y β. Es claro que se trata de un sistema compatible y puede calcularse una pareja de valores α y β que lo satisfagan. Para estos valores, las coordenadas de M verifican el sistema G y como M es un punto cualquiera del espacio de tres dimensiones, se ha demostrado que las ecuaciones G representan todos los puntos del espacio de tres dimensiones. Entonces, para que el problema quede determinado, es necesario que exista una relación independiente entre los parámetros; a esta relación se le llama ecuación de condición entre los parámetros:

$$\phi(\alpha, \beta) = 0 \qquad \ldots(C)$$

Entonces el problema está determinado porque si entre las ecuaciones G y (C) se elimina un parámetro, se obtienen las ecuaciones de la generatriz con un solo parámetro y se llega así al primer caso, bastará eliminar a este parámetro para obtener la ecuación:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \ldots(S)$$

que es la de la superficie.

Esta teoría puede generalizarse para un número cualquiera de parámetros.

Por ejemplo, si en la generatriz figuran n parámetros, para que el problema esté determinado deben existir n - 1 ecuaciones de condición entre los parámetros. La ecuación de la superficie engendrada se obtiene eliminando a los n parámetros entre las dos ecuaciones de la generatriz y las n - 1 ecuaciones de condición.

La ley según la cual la generatriz se desplaza y se deforma en el espacio se tendrá obligando a la generatriz a tocar constantemente a ciertas curvas fijas llamadas directrices.

Considérese el problema cuando en las ecuaciones de la generatriz figuran tres parámetros.

$$G: \begin{cases} f_1\ (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ f_2\ (x, y, z\ \alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases}$$

considérese ahora la curva fija:

$$D_1: \begin{cases} h_1\ (x, y, z,) = 0 \\ h_2\ (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

que es una directriz.

Para que la curva G toque a la directriz D_i se requiere que existan valores de x, y, z que verifiquen a las ecuaciones G y D_i. Para esto basta que se despejen a las variables x, y, z en el sistema formado por tres de las ecuaciones y se lleven los valores obtenidos a la cuarta ecuación.

Si ésta se verifica, la curva G toca a la curva D_1; la ecuación así obtenida ya no contendrá a las variables x, y, z y sólo tendrá parámetros y constantes:

$$\phi_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \qquad \ldots (C_1)$$

Se ha encontrado una de las ecuaciones de condición necesaria para resolver el problema. Pero, como en la generatriz figuran tres parámetros, hace falta otra ecuación de condición entre dichos parámetros, y para ello, será necesario tener otra directriz:

$$D_2: \begin{cases} h_3\ (x, y, z_.) = 0 \\ \\ h_4\ (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Si se procede de manera semejante eliminando a x, y, z, entre las ecuaciones G y D_2, se obtiene otra ecuación de condición:

$$\phi_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \qquad \ldots(C_2)$$

Si está ecuación se verifica, la generatriz G se apoya en la directriz D_2. Ahora el problema está determinado, basta eliminar los parámetros entre las ecuaciones G, (C_1) y (C_2). La ecuación encontrada es la ecuación de la superficie engendrada por G al moverse en el espacio de tres dimensiones apoyándose en las curvas directrices D_1 y D_2:

$$F\ (x, y, z) = 0 \qquad \ldots(S)$$

Obsérvese que cada directriz suministra una ecuación de condición. Puede entonces generalizarse el siguiente método:

Si en las ecuaciones de la generatriz figuran n parámetros, el problema estará determinado si se tienen $n - 1$ directrices. Primero se eliminan a las variables x, y, z entre las ecuaciones de la generatriz y cada par de ecuaciones de cada directriz. Como resultado de cada eliminación se obtiene una ecuación de condición entre los parámetros. A continuación se eliminan los parámetros entre las ecuaciones de la generatriz y las $n - 1$ ecuaciones de condición. Se obtiene entonces una ecuación $F(x, y, z) = 0$ que es la ecuación buscada de la superficie, engendrada por la generatriz al moverse apoyándose en las $n - 1$ directrices.

5.5 SIMPLIFICACIÓN DEL MÉTODO PARA ALGUNOS TIPOS DE SUPERFICIES

El método que se acaba de presentar es de aplicación general, sin embargo para ciertos tipos de superficies es posible simplificar algo su empleo. A continuación se presentan algunos de estos casos.

5.5.1 SUPERFICIES CILÍNDRICAS CON DIRECTRIZ CONTENIDA EN UN PLANO COORDENADO O UNO PARALELO A UNO DE ELLOS Y GENERATRIZ CON UNA DIRECCIÓN CUALQUIERA

Para presentar este caso, supóngase que se tiene una curva directriz contenida en un plano paralelo al plano XZ, y que dista de éste d unidades. Entonces:

$$D: \begin{cases} f(x, z) = 0 & \ldots(1) \\ y = d & \ldots(2) \end{cases}$$

Ahora, supóngase que la generatriz es una recta paralela al vector:

$$\bar{v} = a\,i + b\,j + c\,k$$

Para aplicar el método, será necesario determinar las ecuaciones de la generatriz:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Como la directriz está contenida en un plano paralelo al XZ, conviene despejar a x, y también a z para tenerlas como función de y:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

$$x = \frac{a}{b}\,y - \frac{a}{b}\,y_0 + x_0$$

Dado que a, b y c son constantes, pero x_0 y y_0 son diferentes para cada posición de la generatriz, si se hace:

$$\alpha = -\frac{a}{b}\,y_0 + x_0$$

entonces:

$$x = \frac{a}{b} y + \alpha \qquad ...(3)$$

que es la primera ecuación de la generatriz.

Análogamente, para el caso de z:

$$z = \frac{c}{b} y + \beta \qquad ...(4)$$

que constituye la segunda ecuación de la generatriz.

A continuación se aplicaría el método como en los demás casos.

De la misma manera, si ahora se tuviera la directriz contenida en un plano paralelo al XY:

$$D: \begin{cases} f(x, y) = 0 & ...(1) \\ z = d & ...(2) \end{cases}$$

Si la dirección que debe seguir la generatriz está dada por el vector:

$$\bar{v} = a\,i + b\,j + c\,k$$

Las ecuaciones de la generatriz quedan:

$$G: \begin{cases} x = \frac{a}{c} z + \alpha & ...(3) \\ y = \frac{b}{c} z + \beta & ...(4) \end{cases}$$

Por último, si la directriz está contenida en un plano paralelo al YZ, las ecuaciones de la directriz y de la generatriz son:

$$D: \begin{cases} f(y, z) = 0 & ...(1) \\ x = d & ...(2) \end{cases}$$

$$G: \begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x + \alpha & \ldots(3) \\ \\ z = \dfrac{c}{a}x + \beta & \ldots(4) \end{cases}$$

Para fijar ideas se presenta el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 5.7. Encontrar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya generatriz es paralela al vector $\bar{v} = i - j + k$ y cuya directriz es la parábola:

$$D: \begin{cases} y^2 = 4x & \ldots(1) \\ z = 3 & \ldots(2) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, las ecuaciones de la generatriz son:

$$G: \begin{cases} x = \dfrac{1}{1}z + \alpha \\ y = \dfrac{-1}{1}z + \beta \end{cases}$$

es decir:

$$G: \begin{cases} x = z + \alpha & \ldots(3) \\ y = -z + \beta & \ldots(4) \end{cases}$$

Ahora, aplicando normalmente el método:

a) Tomando en cuenta (2) en (3) y en (4):

$$x = 3 + \alpha$$

$$y = -3 + \beta$$

sustituyendo en (1):

$$(\beta - 3)^2 = 4(3 + \alpha) \qquad \ldots(C)$$

b) Despejando α y β de (3) y (4):

$$\alpha = x - z$$

$$\beta = y + z$$

sustituyendo en (C):

$$(y + z - 3)^2 = 4(x - z + 3) \qquad \ldots(S)$$

5.5.2 SUPERFICIES CÓNICAS CON DIRECTRIZ CONTENIDA EN UN PLANO COORDENADO O EN UNO PARALELO A UNO DE ELLOS Y VÉRTICE FUERA DE ESE PLANO

Nuevamente, para la presentación de esta situación se explicará suponiendo un caso.

Supóngase que la directriz está contenida en un plano paralelo al YZ:

$$D: \begin{cases} f(y, z) = 0 & \ldots(1) \\ x = d & \ldots(2) \end{cases}$$

y que el vértice es el punto $V(x_0, y_0, z_0)$. Entonces, las ecuaciones de la generatriz se obtienen de la siguiente manera:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

En este caso, x_0, y_0 y z_0 son constantes, y a, b y c son variables. De manera que también conviene establecer a las variables y, z en términos de x:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

Si se hace:

$$\alpha = \frac{b}{a}$$

$$y - y_0 = \alpha(x - x_0)$$

Análogamente:

$$z - z_0 = \beta(x - x_0)$$

Entonces, las ecuaciones de la generatriz quedan:

$$G: \begin{cases} y - y_0 = \alpha(x - x_0) \\ z - z_0\ \beta(x - x_0) \end{cases}$$

A continuación se aplicaría el método normalmente.

De manera similar, si ahora la directriz estuviera contenida en un plano paralelo al XY:

$$D: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = d \end{cases}$$

y el vértice es $V(x_0, y_0, z_0$, las ecuaciones de la generatriz serían:

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha(z - z_0) \\ y - y_0 \, \beta(z - z_0) \end{cases}$$

Finalmente, si la directriz está contenida en un plano paralelo al XZ, con vértice $V(x_0, y_0, z_0)$:

$$D: \begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = d \end{cases}$$

entonces las ecuaciones de la generatriz quedan:

$$G: \begin{cases} x - x_0 = \alpha(y - y_0) \\ z - z_0 = \beta(y - y_0) \end{cases}$$

Para fijar ideas se resolverá el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 5.8. Determinar la ecuación de la superficie cónica con vértice $V(3, -1, 2)$ y directriz:

$$D: \begin{cases} y = 4 \text{ sen } 2x & \text{...(1)} \\ z = 0 & \text{...(2)} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Las ecuaciones de la generatriz son:

$$G: \begin{cases} x - 3 = \alpha(z - 2) & \text{...(3)} \\ y + 1 = \beta(z - 2) & \text{...(4)} \end{cases}$$

ahora, aplicando el método:

a) de (2), en (3) y (4):

$$x = -2\alpha + 3$$

$$y = -2\beta - 1$$

tomando en cuenta estos valores en (1):

$$-2\beta - 1 = 4 \text{ sen } [2 (3 - 2\alpha)]$$

entonces:

$$2\beta + 1 + 4 \text{ sen } (6 - 4\alpha) = 0 \qquad \text{...(C)}$$

b) despejando α y β de (3) y (4), respectivamente:

$$\alpha = \frac{x - 3}{z - 2}$$

$$\beta = \frac{y + 1}{z - 2}$$

sustituyendo en (C):

$$\frac{2y + 2}{z - 2} + 1 + 4 \text{ sen } \left[6 - \frac{4x - 12}{z - 2}\right] = 0$$

multiplicando por $z - 2$, y haciendo operaciones dentro del argumento de la función seno:

$$2y + 2 + z - 2 + 4(z - 2) \text{ sen } \frac{6z - 12 - 4x + 12}{z - 2} = 0$$

finalmente:

$$2y + z + (4z - 8) \text{ sen } \frac{6z - 4x}{z - 2} = 0 \qquad \text{...(S)}$$

5.5.3 SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN CUANDO EL EJE DE REVOLUCIÓN ES UN EJE COORDENADO Y SE CONOCE LA ECUACIÓN DE UNA DE SUS MERIDIANAS CONTENIDA EN UN PLANO COORDENADO CONTINENTE DEL EJE DE GIRO

Ahora para este caso, supóngase que se desea determinar la ecuación de una superficie de revolución que se formará con el giro de la curva

$$M: \begin{cases} f(x,\ y) = 0 & \text{...(1)} \\ z = 0 & \text{...(2)} \end{cases}$$

alrededor del eje X. Veáse figura 5.11.

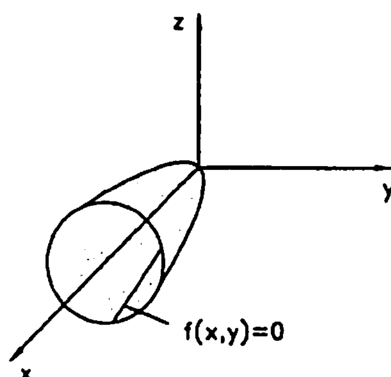


FIGURA 5.11

Para resolver el problema, puede suponerse que la directriz de esta superficie es la curva M y que la generatriz es una circunferencia que se desplaza paralela al plano YZ, con centro sobre el eje x, radio variable y que siempre toca a M, véase figura 5.11. Por lo tanto, las ecuaciones de la generatriz son:

$$G: \begin{cases} y^2 + z^2 = \alpha^e & \text{...(3)} \\ z = \beta & \text{...(4)} \end{cases}$$

Aplicando el método, de (2) en (3):

$$y^2 = \alpha^2 \Rightarrow y = \pm\alpha$$

llevando este valor a (1) y tomando en cuenta (4):

$$f(\beta,\ \pm\ \alpha) = 4354740 \qquad \text{...(C)}$$

ahora, (3) y (4) en (C):

$$f\left(x,\ \pm\ \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0 \qquad \text{...(S)}$$

que es la ecuación de la superficie.

Obsérvese que la ecuación obtenida resultó igual a la primera de la meridiana, sólo que en lugar de y, resultó más o menos la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de la misma y más el cuadrado de z. Este resultado puede generalizarse a la simplificación:

Si se desea determinar la ecuación de una superficie de revolución cuando se conocen las ecuaciones de una meridiana contenida en un plano coordenado y el eje de giro es un eje coordenado, basta con sustituir la variable diferente a la correspondiente al eje de rotación por más o menos la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la misma variable más el cuadrado de la variable que está igualada a cero en la otra ecuación.

EJERCICIO 5.9. Determinar la ecuación del toro (toroide) que se genera con la rotación, alrededor del eje z, de la circunferencia:

$$M: \begin{cases} (y - R)^2 + z^2 = r^2 & \dots(1) \\ x = 0 & \dots(2) \end{cases}$$

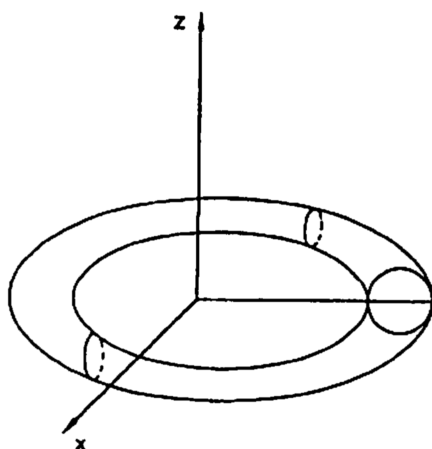


FIGURA 5.12

SOLUCIÓN:

De acuerdo con lo obtenido líneas arriba, para la obtención de la ecuación de la superficie, debe identificarse en la primera ecuación de la curva meridiana a la variable diferente a la correspondiente al eje de giro. Como en este caso el eje alrededor del cual gira la curva es el eje z, la otra variable es y. Ahora debe hacerse la sustitución:

$$\left(\pm \sqrt{y^2 + x^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \qquad \dots(S)$$

que es la ecuación buscada.

5.6 IDENTIFICACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Como se ha repetido en varios capítulos, son dos los problemas más importantes en el estudio de la Geometría Analítica, el primero de ellos ya ha sido tratado. A continuación, se hablará del otro; es decir, de la identificación de una superficie, teniendo como dato su representación analítica. Para el efecto, el método más comúnmente empleado es el llamado ***discusión de la ecuación de una superficie.*** Ahora se explicará este método, pero es muy conveniente señalar que no siempre es necesario completar la total aplicación del método ya que el objetivo es siempre la identificación de la superficie, y si ésta se logra con sólo algunos pasos del método, o por medio de algún otro recurso, sería ocioso concluir con la aplicación del método tan sólo por completarlo, cuando en ocasiones resulta muy engorroso.

5.6.1 DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Para la identificación de una superficie por medio del análisis de su ecuación, es conveniente investigar en dónde se localizan los puntos de intersección de la superficie con los ejes coordenados, si hay; o cómo son las trazas de dicha superficie con los planos coordenados, o con planos paralelos a éstos; o bien, si la superficie presenta simetría con respecto a algún o algunos elementos del sistema de referencia, etc. De manera que con el objetivo de sistematizar esta investigación, se sugiere seguir la siguiente metodología, la cual, para hacerla más comprensible, se presenta simultáneamente con un ejemplo.

EJERCICIO 5.10. Identificar la superficie que tiene por ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6xy = 8$$

SOLUCIÓN:

I. Intersección de la superficie con los ejes coordenados.

I.1. Con el eje x:

Para la determinación de los puntos donde la superficie corta al eje de las x, se hacen $y = z = 0$:

$$5x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

entonces, los puntos de intersección son:

$$(2\sqrt{2/5}),\ 0,\ 0) \quad y \quad (-2\sqrt{2/5},\ 0,\ 0)$$

I.2. Con el eje y

Se asignan $x = z = 0$:

$5y^2 = 8$, que conduce a un caso similar al anterior:

los puntos de intersección son:

$$(0,\ 2\sqrt{2/5},\ 0) \quad y \quad (0,\ -2\sqrt{2/5},\ 0)$$

I.3. Con el eje z.

Se sustituyen $x = y = 0$:

$$8z^2 = 8 \quad \Rightarrow z^2 = 1$$

$$\therefore z = \pm 1$$

los puntos de intersección son:

$$(0,\ 0,\ 1) \quad y \quad (0,\ 0,\ -1)$$

II. Trazas con los planos coordenados.

II.1. Con el plano xy.

Se hace $z = 0$:

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy = 0$$

Al contener la ecuación el término $-6xy$, implica que se trata de una curva con ejes oblicuos a los coordenados. Para averiguar de qué tipo de ecuación se trata se emplea el llamado discriminante $B^2 - 4AC$:

$$(-6)^2 - 4(5)(5) = 36 - 100 = -64$$

que resultó menor que cero; por lo tanto, se trata de una ecuación tipo elipse. Ahora, para determinar si efectivamente se trata de una elipse, se llevará al cabo una rotación de ejes. Como los coeficientes de x y de y son iguales, el ángulo de rotación es $\theta = 45°$.

De las ecuaciones de transformación correspondientes, se sabe que:

$$x = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta$$

$$y = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta$$

dado que 0 = 45° se tiene:

$$\operatorname{sen} \theta = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo y desarrollando:

$$x^2 + y^2 = 4$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Esto significa que sí se trata de una elipse con semiejes dos y uno sobre los nuevos ejes X y Y, respectivamente.

II.2. Con el plano xz.

Se sustituye $y = 0$:

$$5x^2 + 8z^2 = 8$$

que es una elipse con semiejes:

$$2\sqrt{\frac{2}{5}} \text{ sobre el eje } x$$

1 sobre el eje z

II.3. Con el plano yz.

Se hace $x = 0$:

$$5y^2 + 8z^2 = 8$$

También se trata de una elipse con semiejes que tienen los mismos valores numéricos que para el inciso anterior.

III. Simetrías

III.1 Con respecto al eje x.

Se cambian y por $-y$
z por $-z$:

$$5x^2 + 5(-y)^2 + 8(-z)^2 - 6x(-y) = 8$$

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 6xy = 8$$

como la ecuación se modifica, no existe simetría con respecto a ese eje.

III.2 Con respecto al eje y.

Se cambian x por $-x$
z por $-z$:

$$5(-x)^2 + 5y^2 + 8(-z)^2 - 6(-x)y = 8$$

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 6xy = 8$$

No hay simetría con respecto a y.

III.3 Con respecto al eje z.

Se cambian x por $-x$
y por $-y$:

$$5(-x)^2 + 5(-y)^2 + 8z^2 - 6(-x)(-y) = 8$$

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6xy = 8$$

La ecuación no se altera, lo que significa que sí hay simetría con respecto al eje z.

III.4 Con respecto al plano xy.

Se cambia z por $-z$

$$5x^2 + 5y^2 + 8(-z)^2 - 6xy = 8$$

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6xy = 8$$

Sí hay simetría con respecto al plano xy.

III.5 Con respecto al plano xz.

Se cambia y por $-y$

$$5x^2 + 5(-y)^2 + 8z^2 - 6x(-y) = 8$$

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 6xy = 8$$

Por tanto, no hay simetría con respecto a ese plano.

III.6 Con respecto al plano yz.

Se cambian x por $-x$:

$$5(-x)^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6(-x)y = 8$$

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 6xy = 8$$

No hay simetría con respecto a yz.

III.7 Con respecto al origen.

Se cambian x por $-x$:
y por $-y$
z por $-z$

$$5(-x)^2 + 5(-y)^2 + 8(-z)^2 - 6(-x)(-y) = 8$$

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6xy = 8$$

Entonces, sí hay simetría con respecto al origen.

IV. Secciones planas paralelas a los planos coordenados.

IV.1 Paralelas a xy.

Si $z = k$:

$$5x^2 + 5y^2 + 8k^2 - 6xy = 8$$

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy = 8 - 8k^2 \qquad \ldots(A)$$

Se trata de una ecuación tipo elipse, ya que el discriminante es el mismo que aquél obtenido en el inciso I.1. Entonces, las trazas de los planos paralelos al XY con la superficie son elipses o una degeneración de esa cónica, dependiendo de k.

IV.2 Paralelas a xz.

Si $y = k$:

$$5x^2 + 5k^2 + 8z^2 - 6xk = 8$$

$$5x^2 + 8z^2 - 6xk = 8 - 5k^2 \qquad \ldots(B)$$

Es también una ecuación tipo elipse.

IV.3 Paralelas a yz.

Si $x = k$:

$$5k^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6ky = 8$$

$$5y^2 + 8z^2 - 6ky = 8 - 5k \qquad \ldots(C)$$

De nuevo se trata de una ecuación tipo elipse.

V. Extensión.

V.1 En z.

Para investigar los valores de z para los cuales existe la superficie, es conveniente aprovechar la ecuación (A) del inciso IV.1 con la que se puede averiguar para qué valores de k se tiene una elipse, un punto o ningún lugar geométrico. Recuérdese la ecuación (A):

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy = 8 - 8k^2 \qquad \ldots(A)$$

Si se transforma la ecuación, al girar los ejes coordenados empleando las mismas ecuaciones de transformación para rotación de ejes, y dado que se tiene el mismo valor del discriminante y el mismo ángulo de giro, la ecuación transformada queda:

$$x^2 + 4y^2 = 4 - 4k^2$$

En virtud de que se tiene en el miembro izquierdo una suma de dos números positivos para cualquier valor de x y y, para que exista lugar geométrico, el miembro derecho no puede ser negativo, así que para determinar los valores de z para los cuales existe superficie, habrá que resolver la inecuación:

$$4 - 4k^2 \geq 0$$

para resolverla, considérese el producto notable llamado el de los conjugados:

$$(2 + 2k)(2 - 2k) \geq 0$$

para que este producto sea positivo, ambos factores deben tener el mismo signo, entonces, si los dos son positivos:

$$2 + 2k \geq 0 \Rightarrow k \geq -1$$

$$2 - 2k \geq 0 \Rightarrow k \leq 1$$

por lo tanto, el conjunto solución de este primer caso es:

$$-1 \leq k \leq 1$$

Ahora, para el caso en que ambos factores sean negativos:

$$2 + 2k \leq 0 \Rightarrow k \leq -1$$

$$2 - 2k \leq 0 \Rightarrow k \geq 1$$

la intersección de estas dos posibilidades es el conjunto vacío, así que, finalmente, la extensión en z es:

$$-1 \leq z \leq 1$$

es decir, si se hace pasar un plano paralelo al xy, cuya altura esté comprendida en ese intervalo, la superficie y el plano tendrán intersección, si dicha altura sale de ese intervalo, no habrá intersección.

V.2 En y.

Ahora es conveniente analizar la extensión en este eje utilizando la ecuación (B) del inciso IV.2, y para ello se transcribe a continuación:

$$5x^2 + 8z^2 - 6xk = 8 - 5k^2 \qquad \text{...(B)}$$

Como se dijo anteriormente, la ecuación es tipo elipse, pero para representar un lugar geométrico el parámetro k debe tomar ciertos valores. Para averiguarlos, primero se completarán cuadrados:

$$5\left[x^2 - \frac{6k}{5} + \frac{9k^2}{25}\right] + 8z^2 = 8 - 5k^2 + \frac{9\ k^2}{5}$$

$$5\left[x - \frac{3k}{5}\right]^2 + 8z^2 = - \frac{16k^2}{5}$$

De nuevo, para que exista lugar geométrico, el miembro derecho no debe ser negativo, así que resulta la inecuación:

$$8 - \frac{16k^2}{5} \geq 0$$

El conjunto solución de esta inecuación proporciona los valores de y para los cuales existe la superficie:

$$-\sqrt{\frac{5}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$$

V.3 En x:

Ahora se ve la conveniencia de utilizar la ecuación (C) obtenida en el inciso IV.3:

$$5y^2 + 8z^2 - 6ky = 8 - 5k2 \qquad \text{...(C)}$$

Como puede observarse, esta ecuación es análoga a la ecuación (B) y genera una solución equivalente para la extensión en x; es decir:

$$-\sqrt{\frac{5}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Con todos los elementos determinados por esta discusión, ya es posible identificar la superficie. Es claro que se trata de un elipsoide. Para concluir, se elabora a continuación su representación gráfica.

VI. Representación gráfica.

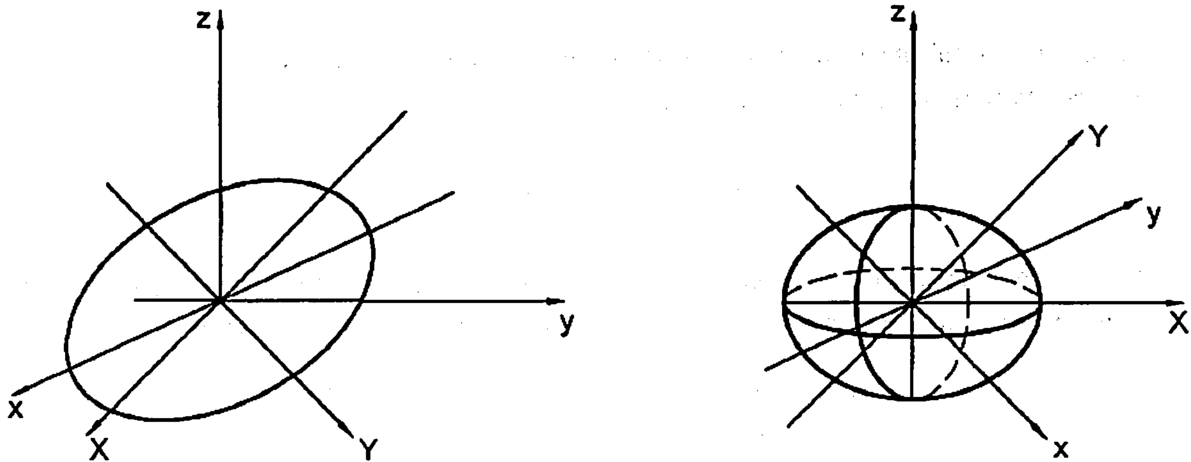


FIGURA 5.13

Como se dijo previamente, el objetivo de la discusión de la ecuación de una superficie, es identificarla o dibujarla. De manera que si puede identificarse la superficie antes de concluir la discusión, no debe uno aferrarse a terminarla, pues con la identificación se cumple el objetivo. Como un ejemplo de esto, considérese el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 5.11. Identificar la superficie cuya ecuación se escribe a continuación, y representarla gráficamente:

$$(4x - 3z)^2 + 16y^2 = 4z^2 \qquad \ldots(S)$$

SOLUCIÓN:

Antes de efectuar toda la discusión de esta ecuación, puede observarse cuál de los pasos de dicha discusión podría arrojar luz sobre el problema. Parece que lo más prudente sería comenzar con el análisis de las secciones paralelas al plano xy. De manera que se hace $z = k$:

$$(4x - 3k)^2 + 16y^2 = 4k^2$$

tomando como factor común a 4 en el primer término:

$$[4(x - \frac{3}{4}k)]^2 + 16y^2 = 4k^2$$

$$16(x - \frac{3}{4}k)^2 + 16y^2 = 4k^2$$

Como puede observarse, se trata de una familia de circunferencias horizontales, con centro sobre el plano XZ radio variable. Cuando k es nula, se reduce a un punto (el origen), y conforme crece k, positiva o negativamente, el radio crece y la abscisa del centro también aumenta en valor absoluto, por lo que puede deducirse que se trata de un cono circular oblicuo. Para dibujarlo, bastará con seleccionar adecuadamente una de estas circunferencias; por ejemplo, si $k = z = 4$:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

además como ya se sabe, el origen es el vértice:

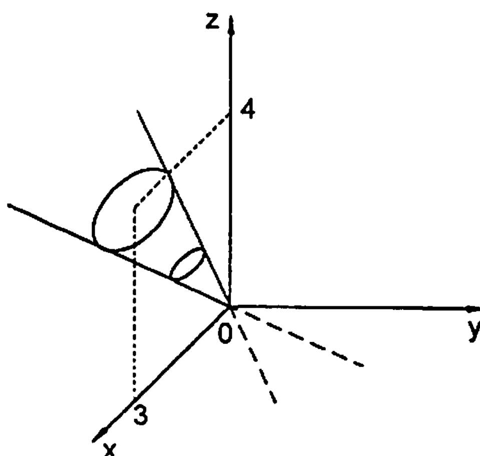


FIGURA 5.14

5.6.2 IDENTIFICACIÓN DE SUPERFICIES CUÁDRICAS

Es evidente que para lograr la identificación de una superficie, antes de concluir con la discusión de su ecuación, se necesita de cierta habilidad que sólo la práctica puede proporcionar. Sin embargo, cuando se trata de una superficie cuádrica que no tenga sus ejes oblicuos, es posible lograr su identificación por medio del análisis de sus coeficientes. Para ello, se incluye la siguiente tabla:

CLASIFICACIÓN DE LAS SUPERFICIES CUÁDRICAS

Cuádricas con centro ($Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$)

R	*A, B, C*	**Lugar Geométrico**
POSITIVO	Todos positivos	Elipsoide
	Todos negativos	Ningún lugar geométrico
	Dos positivos y uno negativo	Hiperboloide de una rama
	Uno positivo y dos negativos	Hiperboloide de dos ramas
	Uno nulo y dos positivos	Cilindro elíptico recto, si los dos son iguales es circular
	Uno nulo y dos negativos	Ningún lugar geométrico
	Uno nulo y los otros de signos diferentes	Cilindro hiperbólico recto
	Dos nulos y uno positivo	Dos planos paralelos
	Dos nulos y uno negativo	Ningún lugar geométrico
NULO	Todos del mismo signo	Uno solo punto que es el origen
	Dos positivos y uno negativo	Cono recto
	Uno nulo y los otros dos del mismo signo	Un eje coordenado
	Uno nulo y los otros de signos diferentes	Dos planos que se cortan
	Dos nulos	Un plano coordenado

NOTA. Si *R* es negativo, se multiplica por menos uno toda la ecuación.

Cuádricas sin centro ($Ax^2 + By^2 = Rz$)

R	*A, B*	Lugar Geométrico
POSITIVO	Del mismo signo	Paraboloide elíptico
	Diferentes signos	Paraboloide hiperbólico
	Uno nulo	Cilindro parabólico recto
NULO	Del mismo signo	Un eje coordenado
	Signos diferentes	Dos planos que se cortan
	Uno nulo	Un plano coordenado

NOTA. Si R es negativo, se multiplica por menos uno toda la ecuación.

EJERCICIO 5.12. Identificar la superficie cuya ecuación es

$$3y^2 + 5z^2 = 4x^2 \qquad \ldots(S)$$

SOLUCIÓN: En este caso, no es necesario efectuar toda la discusión, ya que puede identificarse esta superficie con notar que se trata de un cono elíptico, puesto que se tiene una cuádrica con centro y el término independiente es nulo, con los coeficientes de las variables de x^2, y^2, z^2 y que son dos positivos y uno negativo:

$$3y^2 + 5z^2 + 4x^2 = 0$$

5.7 ECUACIONES VECTORIALES Y PARAMÉTRICAS DE SUPERFICIES

Objetivo. Expresar matemáticamente una superficie por medio de una ley que describe el desplazamiento de un vector de posición, el cual toca continuamente con su extremo a dicho lugar geométrico.

Recuérdese que un plano puede expresarse por medio de la ecuación vectorial:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + r\bar{u} + s\bar{v}$$

en donde:

$\bar{p}$	es el vector móvil
$\bar{p}_0$	es el vector de posición de un punto conocido del plano
$\bar{u}$ y $\bar{v}$	son dos vectores conocidos, no paralelos
r y s	son parámetros

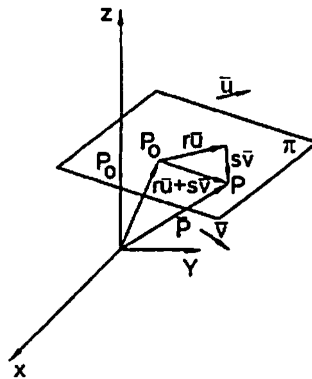


FIGURA 5.15

En la figura 5.15 se puede observar que para lograr que el vector $\bar{p}$ tenga su extremo en el plano, dicho vector debe poder obtenerse como la suma del vector $\bar{po}$ más dos vectores paralelos a los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$. Para ello, con los parámetros r y s se puede modificar la magnitud de $\bar{u}$ y $\bar{v}$, respectivamente, y aún su sentido pero no su dirección. O sea, que si un punto no pertenece al plano, al no poder alterar la dirección de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, no podrá alcanzarse con un vector $\bar{p}$ obtenido con esas características.

La ecuación anterior puede escribirse también:

$$\bar{p}\ (x_0 + ru_x + sv_x)i + (y_0 + ru_y + sv_y)j + (z_0 + ru_z + sv_z)k$$

si se sabe que:

$$\bar{p}_0 = x_0\, i + y_0\, j + z_0\, k$$

$$\bar{u} = u_x\, i + u_y\, j + u_z\, k$$

$$\bar{v} = v_x\, i + v_y\, j + v_z\, k$$

Además, si $\bar{p}$ tiene como componentes (x, y, z), con la sola condición de que pertenezca al plano, por igualdad de vectores se pueden establecer las ecuaciones paramétricas del plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + ru_x + sv_x \\ y = y_0 + ru_y + sv_y \\ z = z_0 + ru_z + sv_z \end{cases}$$

Pero, recuérdese también que tanto la ecuación vectorial anterior como las ecuaciones paramétricas no son las únicas expresiones matemáticas de ese tipo que representan al plano. Por ejemplo, si se recuerda la expresión cartesiana del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

para determinar otras ecuaciones paramétricas y de allí una ecuación vectorial, se puede parametrizar haciendo:

$$x = t_1$$

$$y = t_2$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación cartesiana y despejando z:

$$z = \frac{1}{C} (At_1 + Bt_2 + D)$$

que es la tercera de las ecuaciones paramétricas. Ahora, se tiene:

$$\bar{p} = t_1 i + t_2 j - \frac{1}{c} (At_1 + Bt_2 + D)k$$

que es otra ecuación vectorial del plano.

Nótese que para representar paramétrica o vectorialmente a una superficie, es necesario utilizar dos parámetros, mientras que para la representación de una curva se necesita únicamente de uno.

Por supuesto, las parametrizaciones posibles son muchas y deberá buscarse la más conveniente para cada caso. En ocasiones una adecuada parametrización conduce a la solución más accesible de un problema.

EJERCICIO 5.13. Expresar paramétrica y vectorialmente, de dos maneras diferentes, a la esfera cuya ecuación cartesiana es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

SOLUCIÓN:

Primera forma:

Si se hace:

$$x = s$$

$$y = t$$

se tiene:

$$z = \pm\sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)}$$

Esta parametrización no es muy conveniente puesto que con ella se tiene que separar en dos la superficie, ya que con el signo positivo de z se tendría la cota del hemisferio superior y con el negativo, el inferior. Es decir, no puede tenerse una sola expresión para toda la esfera. Entonces:

Hemisferio superior:

$$\text{ecuaciones paramétricas}\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = \sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)} \end{cases}$$

ecuación vectorial:

$$\bar{p} = si + tj + \sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)}\ k$$

Hemisferio inferior:

$$\text{ecuaciones paramétricas}\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -\sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)} \end{cases}$$

ecuación vectorial:

$$\bar{p} = si + tj - \sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)}\ k$$

Segunda forma:

Para lograr describir el movimiento de un vector de posición $\bar{p}$ que toque constantemente a la esfera, se puede considerar la proyección del vector $\bar{p}$ sobre el plano XY, véase figura 5.16, la que a su vez se proyecta sobre el eje x, y también sobre el eje y.

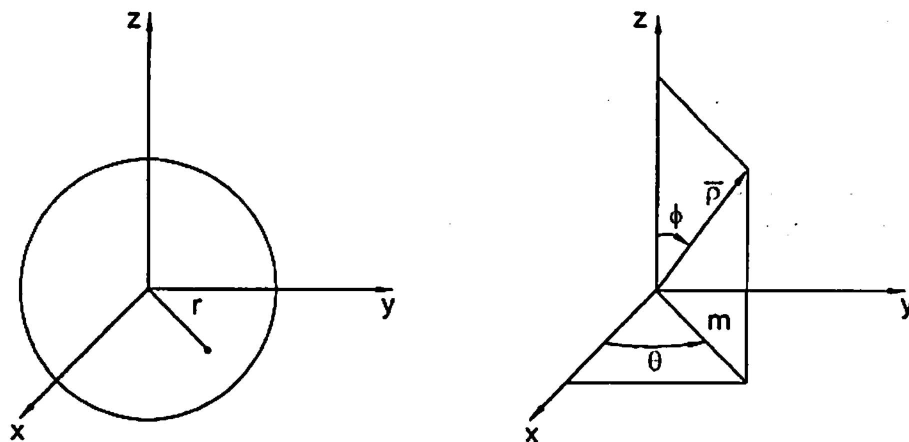


FIGURA 5.16

De la misma manera, puede proyectarse el vector $\bar{p}$ sobre el eje z. Por lo tanto, se pueden considerar como parámetros el ángulo que forma el vector $\bar{p}$ con el eje z, y el ángulo θ formado por la proyección de $\bar{p}$ sobre XY y el eje X. Además, para abarcar la totalidad de la esfera, conviene hacer variar a θ desde cero hasta 2π, para dar la vuelta completa alrededor de z, y a ϕ desde cero hasta π, pues con ello se cubren los ocho octantes. De esta forma, la magnitud de la proyección de $\bar{p}$ sobre el plano XY es:

$$m = r \operatorname{sen} \phi$$

dado que $|\bar{p}| = r$

A su vez, la proyección de m sobre x y sobre y es:

$$x = m \cos \theta$$

$$y = m \operatorname{sen} \theta$$

entonces:

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$$

Por último, la magnitud de la proyección de $\bar{p}$ sobre z es:

$$z = r \cos \phi$$

finalmente:

$$\text{Ecuaciones paramétricas:} \begin{cases} x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} ; \quad \begin{matrix} 0 \le \theta < 2\pi \\ 0 \le \phi \le \pi \end{matrix}$$

Ecuación vectorial:

$$\bar{p} = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, i + r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, j + r \cos \phi \, k$$

EJERCICIO 5.14. Determinar una ecuación vectorial para la superficie reglada formada por las rectas paralelas al plano XZ que se apoyan simultáneamente en la circunferencia *C* y la recta *R*, si:

$$C: \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$R: \begin{cases} x = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

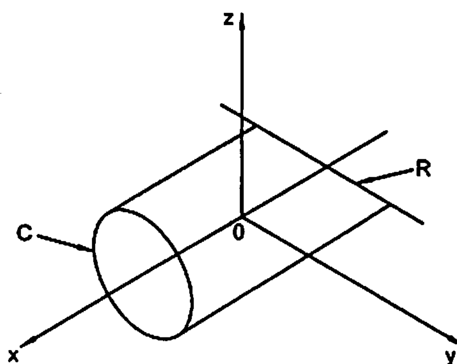


FIGURA 5.17

SOLUCIÓN:

Para representar el lugar geométrico que es tocado por un vector de posición, conviene expresarlo como la suma de un vector $\bar{v}$ que toca primero a la circunferencia más otro que parte del extremo de $\bar{v}$ y continúa paralelamente al plano XZ hasta alcanzar el punto en estudio.

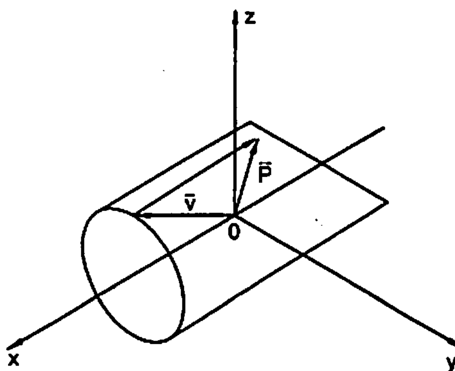


FIGURA 5.18

Para lograr lo anterior, puede expresarse la circunferencia C en términos paramétricos:

$$C: \begin{cases} x = 1 \\ y = \cos t \\ z = \text{sen } t \end{cases}$$

entonces, el vector $\bar{v}$ de la figura quedará representado por:

$$\bar{v} = i + \cos t\, j + \text{sen } t\, k$$

Ahora, para obtener una expresión del vector $\bar{s}$, obsérvese que $\bar{s}$ puede determinarse como un vector que sigue la dirección del vector $\bar{u} - \bar{v}$, véase figura 5.19, pero de magnitud tal, que alcance al punto que se desea:

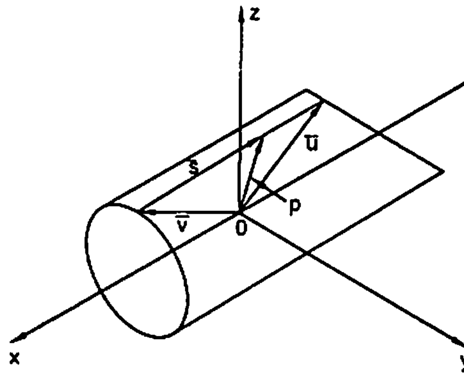


FIGURA 5.19

entonces, para representar al vector $\bar{u}$, conviene escribirlo:

$$\bar{u} = -i + \cos t\, j + 0\, k$$

Puesto que todas las abscisas de los puntos que pertenecen a la recta R deben valer menos uno, todas las cotas son nulas y todas las ordenadas deben ser las mismas que las elegidas para la circunferencia para así asegurar que el vector diferencia $\bar{u} - \bar{v}$ sea paralelo al plano XZ. Por lo tanto, la ecuación vectorial obtenida por este razonamiento resulta:

$$\bar{p} = \bar{v} + \bar{s}$$

pero $\bar{s}$ puede calcularse de:

$$\bar{s} = r\,(\bar{u} - \bar{v})$$

donde r es un parámetro que permite acortar o alargar la magnitud de $\bar{s}$ hasta alcanzar el punto. Entonces:

$$\bar{p} = \bar{v} + r\,(\bar{u} - \bar{v})$$

pero:

$$\bar{u} - \bar{v} = -i + \cos t\, j - (i + \cos t\, j + \operatorname{sen} t\, k) =$$
$$= -2i - \operatorname{sen} t\, k$$
$$\therefore\ \bar{p} = i + \cos t\, j + \operatorname{sen} t\, k + r\,(-2i - \operatorname{sen} t\, k)$$

finalmente:

$$\bar{p} = (1 - 2r)i + \cos t\, j + (1 - r) \operatorname{sen} t\, k$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1. Determinar la ecuación de la superficie que se genera al desplazarse la curva E_1 apoyándose constantemente en las curvas E_2 y E_3 Si:

$$E_1: \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ z = \gamma \end{cases} \qquad E_2: \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{z^2}{6} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E_3: \begin{cases} \dfrac{y^2}{3} - \dfrac{z^2}{6} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

5.2. En el centro de un lago se produjo una perturbación que generó oleaje. Con objeto de proteger las riberas se requiere conocer la ecuación de la superficie de dicho oleaje; para ello, los ingenieros responsables de un anteproyecto, estimaron de una manera simplista que esta superficie se forma con la rotación, alrededor del eje z, de la curva E. Determinar la ecuación del oleaje.

$$E: \begin{cases} z = 8\, e^{-2x} \operatorname{sen} 3x \\ y = 0 \end{cases}$$

5.3. Obtener la ecuación cartesiana de la superficie presentada en el ejercicio 5.14 de la página 214:
a) Empleando rectas paralelas al plano XZ como generatriz.

b) Utilizando elipses paralelas al plano YZ como generatriz.

5.4. Determinar la ecuación de la superficie de una estructura "salto de ski" de una obra complementaria de una cortina en una presa, formada con la curva directriz parabólica de ecuaciones:

$$D: \begin{cases} z = \dfrac{1}{2} y^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

y generatriz también parabólica que se desplaza paralelamente al plano XZ, sin cambiar de forma, con vértice tocando continuamente a la directriz D, si se conoce que la sección de la superficie en el plano XZ pasa por el punto $P(-\frac{1}{2}, 0, 3)$ mostrado en la figura 5.20.

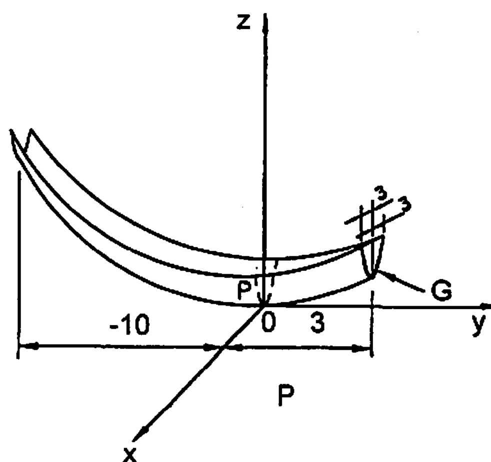


FIGURA 5.20

5.5. Determinar la ecuación de la superficie cónica con vértice $V(-1, -1, -4)$ si se sabe que tiene una directriz elíptica.

$$D: \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

5.6. Determinar si las siguientes ecuaciones representan algún lugar geométrico, en caso afirmativo, indicar de cuál se trata y dibujar aproximadamente su gráfica:

a) $5x^2 + 4y^2 + z^2 - 10x + 16y - 6z + 36 = 0$

b) $5x^2 + 4y^2 + z^2 - 10x + 16y - 6z + 6 = 0$

c) $5x^2 + 4y^2 + z^2 - 10x + 16y - 6z + 30 = 0$

d) $x_2 - 2x - 3y^2 - 18y + 6z^2 - 12z - 20 = 0$

e) $x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 2x - 18y - 12z + 20 = 0$

f) $x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 2x - 18y - 12z - 40 = 0$

g) $3x^2 - 2y - 5z^2 + 6x + 20z - 7 = 0$

h) $3x^2 - 5z^2 + 6x + 20z - 17 = 0$

5.7. Identificar la superficie cuya ecuación es:

$$x^2 + z^2 = 4\,[(y - 4)^2 + 1\,]^2$$

5.8. Identificar el lugar geométrico que representa la siguiente ecuación y hacer un dibujo aproximado de su gráfica:

$$xy - \tfrac{1}{2}(xz + yz) + \tfrac{1}{4}\,z^2 = 14$$

5.9. Determinar una ecuación vectorial del cilindro circular recto de ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 = 9$$

5.10. Determinar una ecuación vectorial del cono elíptico recto con vértice en el origen y con directriz:

$$D: \begin{cases} x^2 + 4z^2 = 16 \\ y = 5 \end{cases}$$

5.11. Determinar una ecuación vectorial del cono elíptico con vértice $V(1,4,5)$ si su traza con el plano XY es:

$$T: \begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS IMPARES

1.1. a) $A(3,5)$

b) $A(-3,-5)$

El sistema resultante es derecho.

1.3. $P(-1, 1, 4)$

1.5. $A(1, 1)$, $B(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ $C(1,-\sqrt{3})$ $D(1, 0)$, $E(0, 0)$

1.7. $P(4,180°)$ (principales)

$P(4,540°)$

$P(-4,360°)$

1.9. $A(3\sqrt{2},45°,3)$, $B(4, 120°, 0)$, $C(2, 270°, -3)$, $D(0, \theta, 7)$ donde $\theta \in \mathbb{R}$; $E(2, 315°, 2)$

1.11. $A(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)$, $B(\sqrt{3},-3,-2)$, $C(0, 0 - 2)$, $D(0,5,0)$, $E(0,0,0)$

1.13. 2 unidades de longitud.

2.1. $A(9,-3, 1)$.

2.3. $\lambda = 3$.

2.5. $\bar{x} = 5\,i - j + 7\,k$.

2.7. En $B(-1, 0, 5)$.

2.9. comp $\text{vect}_{\bar{N}}\ \bar{a} = \left(-\frac{11}{81}, -\frac{44}{81}, -\frac{88}{81}\right)$.

2.11. comp $\text{esc}_{\bar{b}}\ \bar{a} = -11$.

2.13. Área = $\sqrt{62}$ unidades de área.

2.15. $\phi = 120°$.

2.17. Se deja al lector.

3.1. 9 unidades de longitud.

3.3. $\bar{r} = (2t, 3t, 6t) \quad ; t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

$$\left\{\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}\right.$$

3.5. $\bar{p} = (1 - 2\lambda, 9\lambda, -1 + 5\lambda) \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 9\lambda \\ z = -1 + 5\lambda \end{cases} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y}{9} = \frac{z + 1}{5}$$

3.7. $A(-3, 5, 1)$.

3.9. 7 unidades de longitud.

3.11. $\bar{r} = (-3 - m + 4n, 1 + 3n, 2 + m) \quad ; m, n \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = -3 - m + 4n \\ y = 1 + 3n \\ z = 2 + m \end{cases} \quad ; m, n \in \mathbb{R}$$

$-3x + 4y - 3z - 7 = 0$

3.13. $\bar{r} = (-2 + 2\alpha + 7\beta, 1 + \alpha, 3 + 3\alpha + \beta) \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = -2 + 2\alpha + 7\beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 3 + 3\alpha + \beta \end{cases} \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$x + 19y - 7z + 9 = 0$

3.15. 90°

3.17. R está contenida en P.

3.19. P_1: $2x + 3y + 6z + 35 = 0$

P_2: $2x + 3y + 6z - 35 = 0$

4.1. Sí pertenece.

4.3. $-2 \leq a < 4$

4.5. Una manera es $\begin{cases} x = 3 - 4 \text{ sen } \theta \\ y = 5 - 4 \cos \theta; \; 0 \leq \theta < 2\pi \\ x = 0 \end{cases}$

4.7. Sí pertenece.

4.9. a) sí
b) no
c) no

4.11. $-\infty < a < -3 \bigcup 3 < a < +\infty$

4.13. $r = \dfrac{2}{1 + \cos \theta}; \; 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ aproximadamente.

4.15. Es una recta con pendiente 2 y ordenada al origen menos cuatro.

4.17. Es una hipérbola equilátera con ejes oblicuos, de ecuaciones:

$$H: \begin{cases} x = 3 \\ z = \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

5.1. $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 6$

5.3. $4z^2 = (x + 1)^2 (1 - y^2)$

5.5. $2(9x - z + 5)^2 + 3(9y - z + 5)^2 = (z + 4)^2$

5.7. Superficie de revolución generada al girar la parábola

$$\begin{cases} (y - 4)^2 = \dfrac{1}{2} (x - 2) \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{alrededor del eje } y.$$

5.9. $\bar{p} = 3 \cos \theta\, i + 3 \operatorname{sen} \theta\, j + tk \; ; \; 0 \leq \theta < 2\pi \; ; \; t \in \mathbb{R}$

5.11. $\bar{r} = [1 - m\,(1 - 5 \cos \theta)]i + 4[1 - m(1 - \operatorname{sen} \theta)]j + 5(1 - m)k$

$$0 \leq \theta < 2\pi \; ; \; m \in \mathbb{R}$$

Nota: En los ejercicios 5.9 y 5. 11 la respuesta no es única.

MÉTODO PARA DETERMINAR SI UNA SUPERFICIE ES REGLADA*

El conocimiento de si una superficie es reglada o no suele ser muy útil; sin embargo, esta determinación no siempre es sencilla. Diversos autores emplean artificios que pueden aplicarse sólo en casos particulares y de manera difícil. En 1984, el doctor Agustín Tristán presentó un método general de fácil aplicación, con el inconveniente de que para su uso se requiere de conceptos de cálculo de varias variables, por lo que aquí se presenta para que el lector interesado lo pueda emplear, una vez que adquiera esos conceptos, o para que los alumnos de cálculo puedan hacer uso de él.

Objetivo del método

Determinar si una superficie es reglada o no.

Datos necesarios

La ecuación cartesiana de la superficie.

Justificación

El método se apoya en las siguientes hipótesis:

i) Si una superficie es reglada, por cualquiera de sus puntos, al menos una de sus rectas tangentes estará contenida en la superficie en toda su extensión.

ii) Si una superficie no es reglada, por cualquiera de sus puntos, todas las rectas tangentes tocan a la superficie solamente en el punto de tangencia en un entorno de él.

Tomando en cuenta estas hipótesis, el método consiste en determinar la familia de rectas tangentes a una superficie en uno cualquiera de sus puntos y analizar la posibilidad de que

---

* Publicado en el *Boletín Matemáticas y Cultura*, No. 42, 11 enero 1984, Departamento de Matemáticas Básicas, División de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNAM.

alguna de estas rectas contenga otros puntos de la superficie, con lo cual se determinaría que la superficie es reglada. Si todas las rectas tangentes contienen sólo al punto de tangencia como punto común con la superficie, se demostraría que la superficie no es reglada. Para la determinación de las rectas tangentes a una superficie en un punto se usa el hecho de que todas ellas son perpendiculares al vector gradiente de la superficie valuado en dicho punto.

Aplicación

Sea la superficie de ecuación cartesiana $F(x, y, z) = 0$ y sea el punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Al sustituir las coordenadas de P_0 en la ecuación de la superficie se asegura la pertenencia del punto en la superficie y se obtiene la expresión:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad \ldots(1)$$

Por otra parte, si un vector director de cualquier recta tangente a la superficie es $\bar{u} = (A, B, C)$, la tangencia de la recta que indica la dirección de $\bar{u}$ se asegura con la expresión:

$$\bar{\nabla} F|_{P_0} \cdot \bar{u} = 0 \qquad \ldots(2)$$

Finalmente, un punto cualquiera de la recta tangente a la superficie tiene por coordenadas:

$$\begin{cases} x = x_0 + A\,t \\ y = y_0 + B\,t \\ z = z_0 + C\,t \end{cases}$$

Al sustituir estas coordenadas en la ecuación de la superficie y tomar en cuenta las expresiones (1) y (2) se pueden presentar las dos situaciones:

a) La expresión es válida únicamente para $t = 0$ lo cual significa que el punto de tangencia es el único que es común a la superficie y a cualquier recta de la familia, por lo que la superficie no es reglada.

b) La expresión es válida para una infinidad de valores del parámetro t, además de establecerse una relación entre las componentes de $\bar{u}$, esto quiere decir que hay alguna o algunas direcciones en las que la recta está contenida en la superficie, entonces la superficie es reglada. Además, la relación entre las componentes del vector director, permite determinar unas ecuaciones de una recta que forma parte de la superficie.

Ejemplo 1
Determinar si la superficie de ecuación cartesiana $z = x^2 + y^2 + y$ es reglada.

Solución
En primer lugar es conveniente expresar la ecuación de la superficie en forma implícita

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + y - z = 0$$

Si $P(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de la superficie, al sustituir en la ecuación queda:

$$x_0^2 + y_0^2 + y_0 - z_0 = 0 \qquad \ldots(1)$$

Ahora, el gradiente de F es:

$$\overline{\nabla}F = 2x\, i + (2y + 1)\, j - k$$

El gradiente valuado en P_0 queda:

$$\overline{\nabla}F|_{P_0} = 2\, x_0\, i + (2\, y_0 + 1)\, j - k$$

La perpendicularidad del gradiente anterior con el vector $\overline{u} = A\ i + B\ j + C\ k$ se asegura con:

$$\overline{\nabla}F|_{P_0} \cdot \overline{u} = 0$$

que al aplicarlo queda:

$$2\, A\, x_0 + 2\, B\, y_0 + B - C = 0 \qquad \ldots(2)$$

Por último, al sustituir

$$\begin{cases} x = x_0 + A\, t \\ y = y_0 + B\, t \\ z = z_0 + C\, t \end{cases}$$

en la ecuación de la superficie resulta:

$$(x_0 + A\, t)^2 + (y_0 + B\, t)^2 + (y_0 + B\, t) - (z_0 + C\, t) = 0$$

desarrollando:

$$x_0^2 + 2\, A\, x_0\, t + A^2\, t^2 + y_0^2 + 2\, B\, y_0\, t + B^2\, t^2 + y_0 + B\, t - z_0 - C\, t = 0$$

ordenando:

$$x_0^2 + y_0^2 + y_0 - z_0 + t\,(\,2\,A\,x_0 + 2\,B\,y_0 + B - C\,) + t^2\,(\,A^2 + B^2\,) = 0$$

tomando en cuenta las expresiones (1) y (2):

$$t^2\,(\,A^2 + B^2\,) = 0$$

la expresión se cumple solamente si $t = 0$, ya que la suma de dos números positivos no puede ser nula y si ambos son nulos, y t es diferente de cero, la expresión (2) sería válida sólo si C también fuera igual a cero, lo cual es absurdo dado que las tres componentes de un vector *director* no pueden ser simultáneamente nulas. Entonces, si $t = 0$ quiere decir que las rectas son tangentes a la superficie y ésta no es reglada. Al ver que se trata de un paraboloide de revolución, se comprende que no es reglada.

Ejemplo 2

Demostrar que el paraboloide hiperbólico de ecuación cartesiana $z = 9\,x^2 - 16\,y^2$ es una superficie reglada y determinar unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica de una recta contenida en el paraboloide y que pase por el punto $P_0\,(1,\ 1, -7)$.

Solución

La ecuación, valuada para un punto de ella, se escribe:

$$9\,x_0^2 - 16\,y_0^2 - z_0 = 0 \qquad \ldots(1)$$

El gradiente de $F(x, y, z) = 0$ es:

$$\bar{\nabla}F|_{P_0} = 18\,x_0\,i - 32\,y_0\,j - k$$

La perpendicularidad de un vector $\bar{u} = A\,i + B\,j + C\,k$ con el gradiente se asegura con:

$$18\,A\,x_0 - 32\,B\,y_0 - C = 0 \qquad \ldots(2)$$

Sustituyendo $\begin{cases} x = x_0 + A\,t \\ y = y_0 + B\,t \\ z = z_0 + C\,t \end{cases}$

en la ecuación del paraboloide:

$$9\,(x_0 + A\,t)^2 - 16\,(y_0 + B\,t)^2 - (z_0 + C\,t) = 0$$

desarrollando, factorizando y ordenando:

$$9\,x_0^2 - 16\,y_0^2 - z_0 + t\,(18\,A\,x_0 - 32\,B\,y_0 - C) + t^2\,(9\,A^2 - 16\,B^2) = 0$$

tomando en cuenta (1) y (2):

$$t^2\,(9\,A^2 - 16\,B^2) = 0$$

esta expresión puede ser válida si $t = 0$, lo cual siempre se cumple pues se trata del punto de tangencia, pero también es posible que

$$9\,A^2 - 16\,B^2 = 0$$

para cualquier valor de t. Esto significa que por cada punto del paraboloide puede pasar al menos una recta que se aloje en toda su extensión en la superficie, con lo que se demuestra que el paraboloide es una superficie reglada.

Por otra parte, para determinar unas ecuaciones de una recta que pase por $P_0\,(1,\,1,-7)$ y que se aloje en el paraboloide, hace falta un vector que señale la dirección de dicha recta, por lo que de (3):

$$A = \pm\,\frac{4}{3}B\,; \quad \text{si } B = 3\,, \quad A = \pm\,4$$

al tomar el valor positivo y sustituir estos valores en (2) junto con las coordenadas del punto:

$$(18)(4)(1) - (32)(3)(1) - C = 0 \quad \rightarrow \quad C = -\,24$$

entonces, un vector director de la recta es $\bar{u} = (4,\,3,-24)$ y las ecuaciones buscadas son:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = -\,\frac{z+7}{24}$$



Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

en la ecuación del paraboloide:

$$9 (x_0 + A\, t)^2 - 16 (y_0 + B\, t)^2 - (z_0 + C\, t) = 0$$

desarrollando, factorizando y ordenando:

$$9\, x_0^2 - 16\, y_0^2 - z_0 + t\,(18\, A\, x_0 - 32\, B\, y_0 - C) + t^2 (9\, A^2 - 16\, B^2) = 0$$

tomando en cuenta (1) y (2):

$$t^2 (9\, A^2 - 16\, B^2) = 0$$

esta expresión puede ser válida si $t = 0$, lo cual siempre se cumple pues se trata del punto de tangencia, pero también es posible que

$$9\, A^2 - 16\, B^2 = 0$$

para cualquier valor de t. Esto significa que por cada punto del paraboloide puede pasar al menos una recta que se aloje en toda su extensión en la superficie, con lo que se demuestra que el paraboloide es una superficie reglada.

Por otra parte, para determinar unas ecuaciones de una recta que pase por $P_0\ (1,\ 1,-7)$ y que se aloje en el paraboloide, hace falta un vector que señale la dirección de dicha recta, por lo que de (3):

$$A = \pm\, \frac{4}{3} B\ ; \quad \text{si}\ B = 3\ , \quad A = \pm\, 4$$

al tomar el valor positivo y sustituir estos valores en (2) junto con las coordenadas del punto:

$$(18)(4)(1) - (32)(3)(1) - C = 0 \quad \rightarrow \quad C = -\,24$$

entonces, un vector director de la recta es $\bar{u} = (4,\ 3,-24)$ y las ecuaciones buscadas son:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{3} = -\,\frac{z + 7}{24}$$

Esta obra se terminó de imprimir
en febrero de 2007
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 750 ejemplares.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ingeniería